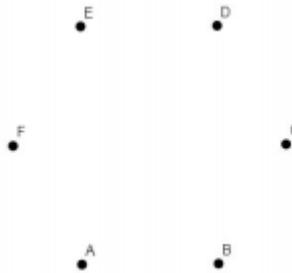


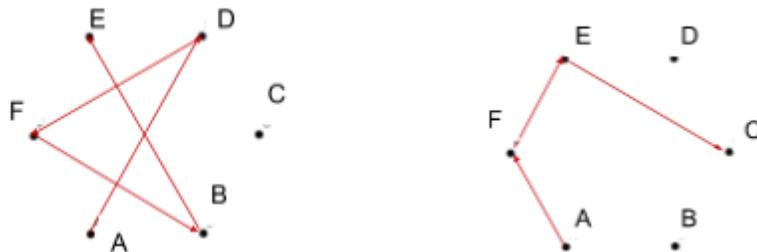
1. Combinatoria

- Hay dos niñas y siete niños en un club de ajedrez. Se debe escoger un equipo de 4 personas para un torneo y debe haber al menos una niña en el equipo. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?
- En una ciudad, los números de código postal tienen 5 dígitos y van desde 00000 hasta 99999.
 - ¿Cuántos de estos códigos cumplen que al multiplicar sus cifras el resultado es impar?
 - ¿Cuántos tienen además sus 5 cifras diferentes?
- ¿De cuántas maneras se pueden acomodar los números del 1 al 9 en una cuadrícula de 3×3 de manera que no hay dos pares o dos impares en casillas que comparten un lado?
- ¿Cuántas formas hay de poner una torre blanca y una negra en un tablero de ajedrez sin que se amenacen?
- Flavio camina por los puntos de coordenadas enteras en el plano. En cada paso avanza una unidad entre dos puntos adyacentes. Si Flavio quiere ir del punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (0, 10)$ en exactamente 12 pasos, ¿cuántos caminos distintos que no repitan vértices puede seguir?
- ¿Cuántas formas hay de poner dos reyes en un tablero de ajedrez sin que se amenacen?
- Considere una baraja inglesa. Se define una mano como un subconjunto de 5 cartas.
 - ¿Cuántas manos posibles hay?
 - ¿Cuántas manos tienen escalera de color? Escalera de color: cinco cartas en orden numérico, todas del mismo palo.
 - ¿Cuántas manos tienen póker? Póker: Cuatro cartas del mismo valor.
 - ¿Cuántas manos tienen full? Full: Tres cartas del mismo valor y un par del mismo valor diferente al anterior.
 - ¿Cuántas manos tienen color? Color: Cinco cartas del mismo palo.

- f. ¿Cuántas manos tienen escalera? Escalera: cinco cartas consecutivas.
- g. ¿Cuántas manos tienen tercia? Tercia: Tres cartas del mismo valor y dos cartas diferentes.
- h. ¿Cuántas manos tienen dos pares? Dos pares: dos cartas del mismo valor, otras cartas del mismo valor diferente al anterior y una carta diferente a las dos anteriores.
- i. ¿Cuántas manos tienen SÓLO un par? Par: dos cartas del mismo valor y tres diferentes.
8. [OMMAGS 2019, Semifinal] Después del no tan reciente rompimiento de relaciones de una popular empresa de celulares con la plataforma que le brindaba su sistema operativo, ha decidido crear su propio sistema operativo. Uno de los aspectos más importantes para un teléfono celular es contar con una clave para que sólo el usuario pueda desbloquear su teléfono. Imitando un poco el aspecto más popular, han decidido implementar un bloqueo de patrón, en una figura de seis puntos como la de la derecha, cada punto con una letra de la A a la F.



La manera en la que funciona un patrón de bloqueo es que se tienen que unir al menos cuatro puntos de los de la figura con segmentos de línea, de tal forma que el inicio del siguiente segmento sea el final del segmento anterior; y de tal forma que hay un punto inicial y otro final, distintos entre sí. Cada punto puede ser utilizado a lo más una sola vez. Estos son ejemplos de patrones válidos:



¿Cuántos patrones de bloqueo válidos distintos se pueden formar? Justifica tu respuesta. Nota: Para un patrón de bloqueo, lo que nos interesa es el orden en el que se forma la línea. De esta manera, se cuentan como distintos los patrones A-F-E-C y C-E-F-A, aunque al final formen la misma figura.

También se consideran diferentes los patrones que se obtienen de girar o voltear otros patrones.

9. Una persona quiere subir una escalera; lo puede hacer subiendo uno o dos escalones a la vez. Si la escalera tiene 10 escalones en total, ¿de cuántas formas distintas puede subir las escaleras?
10. ¿Cuántas formas hay de colorear un tetraedro usando 4 colores? Se pueden repetir los colores, pero si una forma se puede obtener girando otra se consideran la misma.
11. Vamos a colorear dos cuadritos de una cuadrícula de 4×4 de color rojo, los cuadritos restantes quedarán de color verde. Dos coloraciones se consideran equivalentes si una se puede obtener de la otra bajo una rotación. ¿Cuántas coloraciones no equivalentes se pueden hacer?
12. ¿De cuántas formas podemos escribir 9 como la suma de 3 enteros positivos? El orden importa, $1 + 7 + 1$ no es la misma que $1 + 1 + 7$.
13. Sea n un entero positivo, al igual que x_1, x_2, \dots, x_i . ¿Cuántas soluciones existen para la ecuación $n = x_1 + x_2 + \dots + x_i$?
14. En cierto país circulan billetes de \$1, \$2, \$5, \$10, \$20, \$50 y \$100. La mamá de Nacho le encargó ir al molino y comprar \$2 de tortillas. Si Nacho pagó con un billete de \$100, ¿de cuántas maneras diferentes le pueden dar su cambio?
15. ¿De cuántas formas se puede llenar un tablero de 8×8 con 1 o -1 en cada casilla, de forma que la suma de los elementos en cualquier subtablero de 2×2 sea igual a cero?

2. Datos de vital importancias

1. El número de Shannon señala que se pueden jugar más de 10^{120} partidas de ajedrez diferentes, lo que es mucho más del número de átomos en el universo, estimado entre $4 \cdot 10^{78}$ y $6 \cdot 10^{79}$.
<https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99>
2. El padre de Gauss, Gerhald Dietrich, consideraba que los estudios de su hijo eran una pérdida de tiempo.
<https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/>

3. Teoría de Números

1. A Rogelio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercera cifra de su número secreto?
2. Ricky tiene 7 pokemones de agua, 5 de tierra, 10 de fuego y 4 de hielo. Un día decide reglar todos sus pokemones de su tipo favorito a Juanito,

mientras que los demás los dividió entre Erik, Pedro y Mixtli en partes iguales. ¿Cuál es el tipo favorito de pokemón de Ricky?

3. Un niño fue a la tienda a comprar pan. La cuenta fue de 55 pesos, al pagar utilizó 16 monedas exactamente. ¿Es posible que sólo haya utilizado monedas de 1 y 5 pesos?
4. El 13 es un primo tal que al cambiar el orden de sus cifras sigue siendo primo, 31. ¿Cuántos primos de dos dígitos existen tal que al cambiar el orden de sus cifras siguen siendo primos?
5. Demostrar que 3, 5 y 7 es la única terna de números primos que son impares consecutivos.
6. Encontrar todas las parejas de números primos p y q tales que su suma es igual a su producto.
7. ¿Se pueden colocar los signos “+” y “-” en los cuadrados
 $\square 1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10 \square 11 \square 12$
de manera que el resultado nos de 13?
8. La suma de 63 entero positivos distintos entre sí y de cierto entero positivo n es 2020. ¿Cuál es el menor valor posible de n ?
9. Demuestra que todos los primos mayores a dos son de la forma $3k + 1$, con $k \in \mathbb{N}$.
10. Encuentra un número que:
 - a. Sea menor a 100;
 - b. Es una unidad más que un múltiplo de 3;
 - c. Exactamente uno de sus dígitos es primo;
 - d. Si cambias el orden de sus dígitos se obtiene un primo;
 - e. Tiene exactamente cuatro divisores;
 - f. La suma de sus dígitos es un número primo;Si lo multiplicas por 5, la respuesta es mayor que 100.
11. ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos hay tal que el producto de sus dígitos es 2000?
12. Encuentra el menor entero positivo tal que el producto de sus cifras es 189000.
13. En el pizarrón están escritos once números 1. Las posibles operaciones son:
 - a. Tomar dos números y sumarle a ambos 1.
 - b. Restarle a ambos 1.
 - c. Sumarle 1 a uno de los números y restarle uno a otro.¿Es posible mediante estas operaciones tener escritos once números 10?
14. [OMMAGS 2019, Semifinal] Toño escribe en un pizarrón las primeras 2019 potencias de dos comenzando por 1, 2, 4, y así sucesivamente hasta 2^{2018} . Le pide a Gustavo que multiplique todas las potencias 2018

que escribió y le diga el resultado; sin embargo, Gustavo sabe que le resultaría un número muy grande, por lo cual sólo le dirá a Toño la última cifra del número resultante. ¿Cuál es la última cifra del número que resulta de multiplicar las primeras 2019 potencias de dos? Justifica tu respuesta.

15. Encuentra todos los números primos p tales que el número $2p + 5$ es el cuadrado de un número entero.