Soluciones Segundo Examen Eliminatorio

1. Héctor va a escribir los resultados de los problemas vistos en su taller. Cada 10 segundos acaba de escribir un resultado en el pizarrón y cuando un resultado lleva 40 segundos escrito, lo borra.
Cuando Héctor acabó de escribir el primer resultado, Denisse se puso a investigar algo en su teléfono. Pasados 3 minutos con 55 segundos, Denisse encuentra la información que estaba buscando y ve el pizarrón, ¿cuántos resultados, que Héctor ya acabó de escribir, verá Denisse?

Solución:
En el segundo 0, Héctor acaba de escribir el primer resultado. Hay 1 resultado en el pizarrón.
En el segundo 10, Héctor acaba de escribir el siguiente resultado. Hay 2 resultados en el pizarrón.
En el segundo 20, Héctor acaba de escribir el siguiente resultado. Hay 3 resultados en el pizarrón.
En el segundo 30, Héctor acaba de escribir el siguiente resultado. Hay 4 resultados en el pizarrón.
En el segundo 40, Héctor acaba de escribir el siguiente resultado y borra el primer resultado que escribió. Hay 4 resultados en el pizarrón.
En el segundo 50, Héctor acaba de escribir el siguiente resultado y borra el resultado que escribió en el segundo 10. Hay 4 resultados en el pizarrón.
Desde el segundo 30 en adelante, siempre habrán 4 resultados escritos en el pizarrón. Cuando Denisse ve el pizarrón, pasaron $3 \times 60 + 55 = 180 + 55 = 235$ segundos, como $235 > 50$, Denisse vio **$\mathbf{4}$ resultados en el pizarrón**.

2. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger tres números del 1 al 9, no necesariamente distintos, de modo que su suma sea igual a 22?
Nota: el orden de elección no es relevante. Por ejemplo, escoger $6, 7$ y 8 es lo mismo que escoger $8, 6$ y 7.

Solución:
La tercia con números más grandes ordenados de izquierda a derecha que suma 22 es

$$(9,9,4)$$

Podemos generar las otras tercias que tienen al menos un 9 restando 1 al segundo número y sumando 1 al tercero. Obtendríamos las siguientes tercias:

$$(9,8,5), (9,7,6)$$

No podemos seguir con el mismo procedimiento, ya que llegaríamos a la tercia $(9,6,7)$ que es igual a $(9,7,6)$. Ya contamos todas las tercias que al menos contienen un 9, las siguientes tercias no pueden contener ningún 9, de lo contario, se contaría dos veces una misma tercia.
Si el primer número de la tercia es un 8 y no podemos usar $9s$, la tercia, de manera que el segundo número sea lo más grande posible es

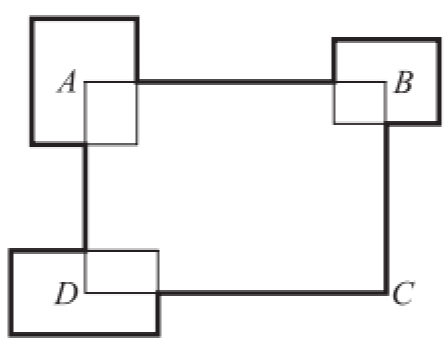
$$(8,8,6)$$

Repitiendo el procedimiento anterior, la única otra tercia que se puede obtener que contengan al 8 es

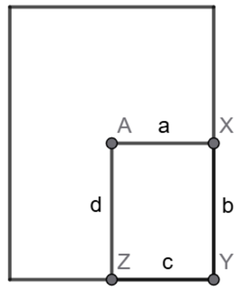
$$(8,7,7)$$

Si no podemos usar $9s$ y $8s$ en las tercias, la mayor suma que se puede obtener es $7 + 7 + 7 = 21$, por lo que no es posible obtener más tercias.
Por lo tanto, se puede escoger **5 tercias distintas** tales que sus sumas sean 22.

3. Ricardo acompaña a sus primos pequeños al cine. Pasados 30 minutos no puede concentrarse en la película y empieza a tener pensamientos matemáticos. Se da cuenta que el protagonista de la película, el cual se hace llamar Steve, construye una casa en un terreno rectángular con un perímetro de $100cm$. Luego construye 3 torres, también en un área rectangular con sus paredes paralelas a las del área original, de manera que el centro de cada torre se encuentra en los vértices de la casa, como se muestra en la figura. Si la suma de los perimetros de las 3 torres es $60cm$, ¿cuál es el perímetro exterior del área en la que Steve construyó (el perímetro en negritas)?



Solución:
La suma de los perímetros de los 4 rectángulos es igual a $160cm$. Hay que restar el perímetro que no está en el perímetro exterior del área en la que Steve construyó.
Veamos lo que pasa dentro de la torre con centro A:



Sean X, Y, Z la intersección del perímetro de la casa con el perímetro de la torre. Como el punto A está en el centro del área rectangular de la torre, Z se encuentra en el punto medio del ancho y X en el punto medio del alto. El cuadrilátero $AXYZ$ es un rectángulo, pues sus ángulos internos son de $90°$, así que $a = c$ y $b = d$, entonces $a + c =$ ancho de la torre y $b + d =$ alto de la torre. El perímetro de la torre es igual a $2 \times (alto + ancho)$ y $a + b + c + d = perímetro\ que\ no\ está\ contenido\ en\ el\ perímetro\ exterior = alto + ancho$. Así que, a los $160cm$ de perímetro hay que restarle el alto y ancho de cada una de las torres, lo que es igual a restar la mitad de perímetro de cada torre.

El perímetro exterior de la figura es igual a $160cm - \frac{perímetro\ torre\ A}{2} - \frac{perímetro\ torre\ B}{2} - \frac{perímetro\ torre\ C}{2} = 160cm - \frac{suma\ de\ perimetros\ de\ las\ torres}{2} = 160cm - \frac{60cm}{2} = 160cm - 30cm = \mathbf{130cm}$.

4. Sea $39!$ el resultado de multiplicar los números del 1 hasta el 39, ¿cuál es el menor número positivo que NO divide a $39!$?

Solución:

Como $39! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 37 \times 38 \times 39$, todos los números del 1 al 39 dividen al $39!$.

El 40 también divide a $39!$ porque $40 = 2 \times 20$ y el 2 y el 20 aparecen dentro de las multiplicaciones del 1 al 39.

El **41 es el menor número positivo que NO divide al 39**!, ya que es un número primo y no está contenido dentro del 1 al 39.

5. Juan Pablo cambia dos dígitos al número 888 buscando un número de 3 cifras que sea divisible entre 8. Dember hace la misma operación que Juan Pablo y obtiene otro número. ¿Cuál es la mayor diferencia que puede existir entre el número de Juan Pablo y el de Dember?

Nota: el número 088 se considera como un número de 2 cifras.

Solución:

Para obtener la mayor diferencia entre los dos números, Juan Pablo debe obtener el número más grande posible y Dember tiene que obtener el menor número posible.

Para obtener el mayor número, su primer dígito debe ser 9. Si el segundo número es 9 y 8 divide al 998, este sería el mayor número posible, pero $\frac{998}{8} = 124.75$, entonces el 8 no divide a 998. El mayor número posible debe tener como segundo dígito al 8, entonces podemos cambiar el tercer dígito. El mayor número será 984 ya que $\frac{984}{8} = 123$.

Para obtener el menor número, su primer dígito debe ser 1. Tenemos que encontrar el menor número A que puede ir en el segundo dígito de forma que 8 divida al número de la forma $1A8$. El valor de A es igual a 2, ya que $\frac{128}{8} = 16$.

La mayor diferencia que puede existir entre los dos números es $984 - 128 = \mathbf{856}$.

6. Victor acaba de terminar todos los problemas que les dejaron en un taller, así que le da pistas a una participante del resultado de uno de los problemas. Cuando está por decirle la última pista, se da cuenta que copió uno de los problemas mal. ¡No ha acabado todos!
En el problema que copió mal, originalmente escribió $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 81$, por lo que su valor de S es igual a 3321, pero en el verdadero problema, no todas las operaciones eran sumas, algunas eran restas. Además ve que su valor de S es incorrecto. ¿cuál es la mínima cantidad de signos $+$ que Victor tiene que cambiar por signos – para que $S = 2025$?

Solución:
La diferencia entre el valor real de S y el que obtuvo Victor es de $3321 - 2025 = 1296$
Si Victor cambia un signo de $+$ a – de cierto número, al valor de S se le restará dos veces el número. Podemos dividir entre 2 la resta de los valores de S, lo que nos da $\frac{1296}{2} = 648$.
Tenemos que encontrar la menor cantidad de números, entre 1 y 81, de forma que su suma sea 648.
Para seleccionar la menor cantidad de números, debemos seleccionar los números más grandes posibles.

Números seleccionados	Suma de números seleccionados
81	81
$80, 81$	161
$79, 80, 81$	240
$78,79,80,81$	318
$77,78,79,80,81$	395
$76,77,78,79,80,81$	471
$75, 76,77,78,79,80,81$	546
$74,75, 76,77,78,79,80,81$	620

$73, 74,75, 76,77,78,79,80,81$	698

Si seleccionamos el 73, la suma se pasaría del 648. Podemos seleccionar al $74,75, 76,77,78,79,80$ y 81, que sumarían 620, entonces seleccionamos también al 28 y así $S = 2025$.
Victor tiene que cambiar mínimo **9 signos**.

7. Si a y b son dos enteros positivos con máximo común divisor 3 y $\frac{a}{b} = 0.4$, ¿cuál es el resultado de la multiplicación $a \times b$?
Nota: el máximo común divisor de dos números es el mayor número entero que divide a ambos, sin dejar ningún residuo. Por ejemplo, el máximo común divisor de 20 y 30 es 10.

Solución:
Como $MCD(a, b) = 3$, entonces $a = 3p$ y $b = 3q$, con p y q tales que $MCD(p, q) = 1$. Sabemos que $\frac{a}{b} = 0.4 = \frac{2}{5}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{3p}{3q} = \frac{p}{q} = \frac{2}{5}$. Podemos ver que $p = 2$ y $q = 5$. También se podría pensar que $p = 2 \times 2$ y $q = 5 \times 2$ o $p = 2 \times k$ y $q = 5 \times k$, con k siendo un entero positivo mayor a 1, pero esto NO es posible, ya que $MCD(p, q) = k$ y el $MCD(a, b) = 3k$.
Entonces $a = 3 \times 2 = 6$ y $b = 3 \times 5 = 15$. El resultado de $a \times b$ es igual a $6 \times 15 = \mathbf{90}$.

8. Durante un taller de la OMMAGS, Sofía escribe el resultado de uno de los problemas en su libreta. Un participante vio el número que Sofía escribió y le dice que el resultado que escribió es incorrecto; entonces le da las siguientes pistas:

a. Le faltó escribir un dígito, en alguna posición.
b. La suma de los dígitos de la respuesta es mayor a 22 y menor a 27.

Sofía se da cuenta que con esas pistas hay muchos números que podrían ser el verdadero resultado. Si el número que había escrito en su libreta es el 39225, ¿cuántos números distintos podrían ser el verdadero resultado?

Solución:

La suma de los dígitos del número que escribió Sofía es igual a $3 + 9 + 2 + 2 + 5 = 21$, entonces el dígito que le faltó escribir puede ser $2, 3,4$ o 5, pues la suma de los dígitos del número real tiene que ser mayor a 22 y menor a 27.

El dígito que le faltó escribir puede estar en 6 posiciones distintas (A, B, C, D, E, F):

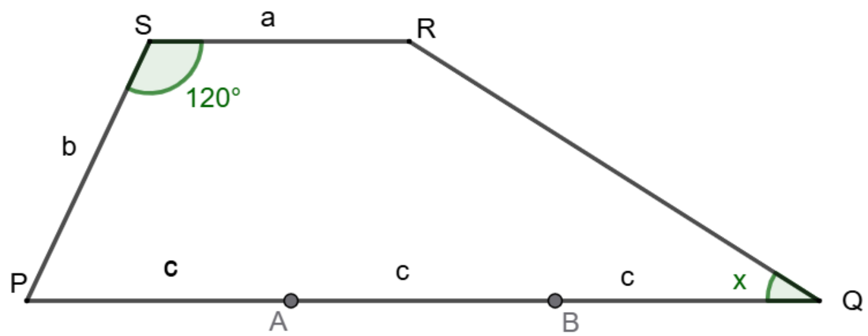
$$A3B9C2D2E5F$$

- Si coloca el nuevo dígito en la posición A, tiene 4 opciones para el dígito.

- Si coloca el nuevo digito en la posición B, tiene 3 opciones para el digito, el valor del dígito sólo podría ser $2, 4$ o 5. No puede usar el 3 ya que obtendría el número 339225 y este ya se contó cuando en la posición A se usó el número 3.
- Si coloca el nuevo dígito en la posición C, tiene 4 opciones para el dígito.
- Si coloca el nuevo dígito en la posición D, tiene 3 opciones para el dígito. El nuevo dígito no puede ser 2 por la misma razón que no podía ser 3 en el segundo inciso.
- Si coloca el nuevo dígito en la posición E, tiene 3 opciones para el dígito.
- Si coloca el nuevo dígito en la posición F, tiene 3 opciones para el dígito.

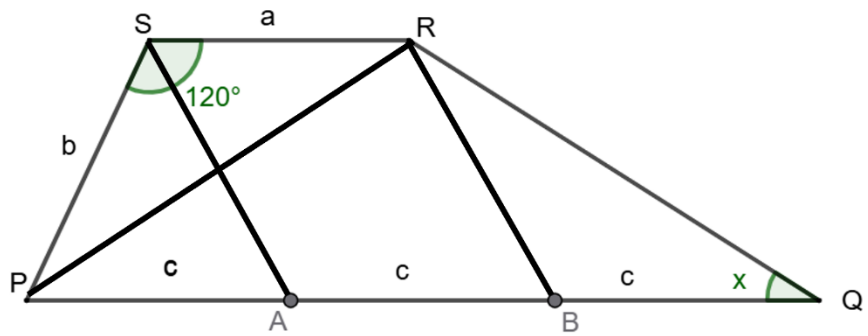
En total, hay $4 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{20}$ **números distintos** que podrían ser el verdadero resultado.

9. En la figura se muestra un trapecio $PQRS$. Se colocan dos puntos A y B, de forma que el segmento se divide en 3 partes iguales con medida c. Los lados PQ y SR son paralelos, el ángulo $\angle RSP$ mide $120°$ y $a = b = c$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle PQR$ marcado con una x?



Nota: Un trapecio es un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

Solución:
Tracemos los segmentos PR, SA y RB.



Como $a = b$, el triángulo SPR es isósceles, por lo que tiene dos ángulos iguales.

$$\angle RPS = \angle SRP$$

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo siempre es $180°$, entonces

$$120° + 2\angle RPS = 180°$$

$$\rightarrow \angle SRP = \angle RPS = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

Como SR es paralela a PQ, por ángulos alternos internos $\angle QPR = \angle SRP = 30°$, entonces $\angle QPS = \angle QPR + \angle RPS = 30° + 30° = 60°$. El triángulo APS también es isósceles porque $b = c$, entonces

$$60° + 2\angle SAP = 180°$$

$$\rightarrow \angle PSA = \angle SAP = \frac{180° - 60°}{2} = \frac{120°}{2} = 60° = \angle APS$$

El triángulo SPA es equilátero pues sus ángulos internos tienen la misma medida, entonces el segmento SA tiene medida de c.

El cuadrilátero $SRBA$ es un paralelogramo porque SR es paralelo a AB y $SR = AB = a = c$, entonces SA es paralela a RB, $RB = SA = c$ y $\angle QBR = 180° - \angle SAP = 180° - 60° = 120°$, por ser ángulos correspondientes $\angle QBR$ y $\angle BAS$, además de que $\angle BAS$ es suplementario de $\angle SAP$.

El triángulo QBR es isósceles porque $QB = RB = c$, entonces

$$\angle QBR + 2\angle RQB = 180°$$

$$\rightarrow \angle QBR = \frac{180° - \angle QBR}{2} = \frac{180° - 120°}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

La medida del ángulo marcado por una x es de $\mathbf{30}°$.

10. Emilio escribe un número de cinco dígitos, después borra uno de los dígitos y se queda con un número de cuatro dígitos. Si la suma de ambos números es 39371, ¿cuál es la suma de todos los posibles números que Emilio pudo haber escrito originalmente?

Solución:

Como en la suma de los dos números, el dígito de las unidades es impar, el único dígito que pudo haber borrado Emilio, de su número original, es el dígito de las unidades. De otra forma, la suma tendría un dígito par en las unidades.

Tenemos que resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ +\,A\,B\,C\,D \\ \hline 3\,9\,3\,7\,1 \end{array}$$

A puede valer 2 o 3, pero si valiera 2, entonces B tendría que valer 17 o 16, lo que es imposible $A = 3$.

$$\begin{array}{r} 3\,B\,C\,D\,E \\ +\;3\,B\,C\,D \\ \hline 3\,9\,3\,7\,1 \end{array}$$

B puede valer 6 o 5, pero si valiera 6, el resultado siempre sería mayor que 39371. $B = 5$.

$$\begin{array}{r} 3\,5\,C\,D\,E \\ +\;3\,5\,C\,D \\ \hline 3\,9\,3\,7\,1 \end{array}$$

C puede valer 8 o 7, pero si valiera 8, el resultado sería mayor que 39371. $C = 7$.

$$\begin{array}{r} 3\,5\,7\,D\,E \\ +\;3\,5\,7\,D \\ \hline 3\,9\,3\,7\,1 \end{array}$$

D sólo puede valer 9. $D = 9$.

$$\begin{array}{r} 3\,5\,7\,9\,E \\ +\;3\,5\,7\,9 \\ \hline 3\,9\,3\,7\,1 \end{array}$$

E tiene que ser igual que 2. $E = 2$.
Emilio sólo pudo haber escrito un número al inicio, ese número es el $\mathbf{35792}$.

11. Denisse le pide a chatGPT que le dé una lista infinita con todos los números impares, empezando por el 1. Varios segundos después, chatGPT para de agregar números a la lista y muestra el siguiente mensaje:

"Error: se superó la máxima cantidad de $1s$ que pueden aparecer en una lista."

Denisse investigo sobre esto y descubrió que si en una lista aparecen $2025\ 1s$, el programa acaba de agregar el número que contuvo al $2025°\ 1$ y se detiene. ¿Cuántos elementos tiene la lista que imprimió chatGPT?

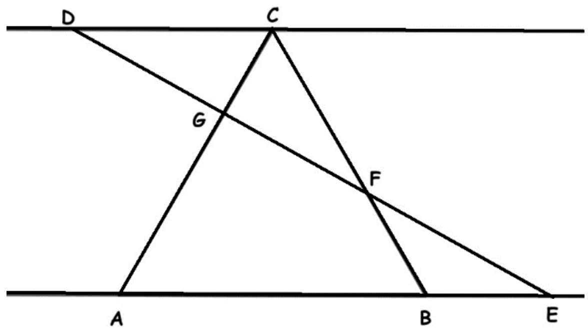
Solución:
Del 1 al 9, se usó 1 vez el número 1.
Del 11 al 19, se usó 1 vez el número 1 en las unidades y 5 veces en las decenas. En total, se usó 6 veces.
Del 21 al 29 se usó 1 vez, únicamente en las unidades. Esto se repite en los rangos del 31 al 39, 41 al 49, …, 91 al 99.
Del 1 al 99 se usaron $9 \times 1 + 6 = 15$ números $1s$.

Del 101 al 199 en las cifras de las centenas, usará 50 veces el número 1 y 15 veces en las decenas y unidades, ya que, si ignoramos el dígito de las centenas sería lo mismo que contar del 1 al 99 cuántos $1s$ se usaron.
Del 201 al 299 también se usarán 15 $1s$, el dígito de las centenas no afecta en nada. Lo mismo pasará en los siguientes rangos de 100 hasta el rango 901 al 999.
Del 1 al 999 se usarán $9 \times 15 + 65 = 200$ $1s$.
Del 1001 al 1999 se usarán 500 $1s$ en las unidades de millar y 200 $1s$ en el resto de las cifras, ya que se ignorarán las unidades de millar.
Del 2001 al 2999 se usarán 200 $1s$. Se repetirá lo mismo en los siguientes rangos de 1000.
Podemos construir la siguiente tabla:

Rango	**Cantidad de** $1s$
1 **al** 999	200
1 **al** 1999	$200 + 700 = 900$
1 **al** 2999	$900 + 200 = 1100$
1 **al** 3999	$1100 + 200 = 1300$
1 **al** 4999	$1300 + 200 = 1500$
1 **al** 5999	$1500 + 200 = 1700$
1 **al** 6999	$1700 + 200 = 1900$
1 **al** 7999	$1900 + 200 = 2100$

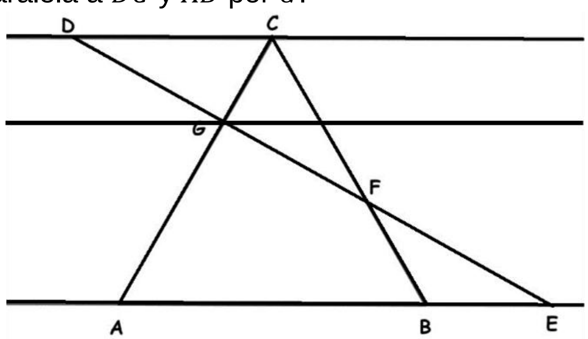
Si mostrara el número 7999, ya habría utilizado 2100 números, entonces el último número que mostró es menor.
Sabemos que del 7901 al 7999 utilizó 15 $1s$, al igual que del 7801 al 7899, del 7701 al 7799, del 7601 al 7699 y del 7501 al 7599. Así que del 1 al 7499 utilizó $2100 - 15 \times 5 = 2100 - 75 = 2025$ $1s$. Como el $7499, 7497, 7495$ ni el 7493 usan $1s$, el último número que mostró chatGPT fue el 7491.
Ese número estaba en la posición $\frac{7491+1}{2} = \frac{7492}{2} = 3746$, la lista tiene **$3746$ elementos**.

12. En la figura, las rectas CD y AB son paralelas. Si ABC es un triángulo equilátero, $DG = GF = FE$, y $AB = 630$, ¿cuánto es la medida del segmento GC?



Solución:

Trazamos una línea paralela a DC y AB por G.



Como $2DG = GE$, por el teorema de Tales

$$2CG = GA$$

Pero

$$GA + CG = 630$$
$$\rightarrow GA = 630 - CG$$

Sustituyendo

$$2CG = 630 - CG$$
$$\rightarrow 2CG + CG = 3CG = 630$$
$$\rightarrow CG = \frac{630}{3} = \mathbf{210}$$