

Soluciones Primer Examen Eliminatorio

1. Yeudiel tiene el doble de canicas que Ricardo, Ricardo tiene 5 canicas menos que yo, que tengo menos canicas que Yeudiel. Entre los 3 tenemos 29 canicas, ¿cuántas canicas tengo yo?

Solución:

Digamos que Y = cantidad de canicas de Yeudiel, R = cantidad de canicas de Ricardo, X = cantidad de canicas que tengo yo.

Por el problema sabemos que

$$\begin{aligned} Y &= 2R \\ R &= X - 5 \\ \rightarrow X &= R + 5 \end{aligned}$$

y

$$Y + R + X = 29$$

Sustituyendo los valores de Y y X en la última ecuación:

$$\begin{aligned} 2R + R + R + 5 &= 29 \\ \rightarrow 4R + 5 &= 29 \\ \rightarrow R &= \frac{29 - 5}{4} = \frac{24}{4} = 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, yo tengo $X = 6 + 5 = 11$ canicas.

2. Ángel va a guardar sus plumas en estuches, cada estuche tiene capacidad para 10 plumas. Tiene 143 plumas negras, 91 plumas azules y 109 plumas rojas. ¿Cuál es la mínima cantidad de estuches que necesita para guardarlas, si no quiere juntar plumas de distinto color en un mismo estuche?

Solución:

Como Ángel no puede juntar plumas de distintos colores en un estuche, contaremos cuántos estuches necesita por cada color de pluma.

Contando los estuches necesarios para las plumas negras, necesitará 14 estuches para guardar 140 plumas y 1 estuche más para guardar las 3 plumas restantes.

Contando los estuches necesarios para las plumas azules, necesitará 9 estuches para guardar 90 plumas y 1 estuche más para guardar la pluma restante.

Contando los estuches necesarios para las plumas rojas, necesitará 10 estuches para guardar 100 plumas y 1 estuche más para guardar las 9 plumas restantes.

En total, Ángel necesita $14 + 1 + 9 + 1 + 10 + 1 = 36$ estuches.



3. En un examen el profesor tiene 39 hojas y quiere repartirlas a sus alumnos, de manera que no haya dos que tengan la misma cantidad de hojas. ¿Cuál es la máxima cantidad de alumnos que puede tener?

Solución:

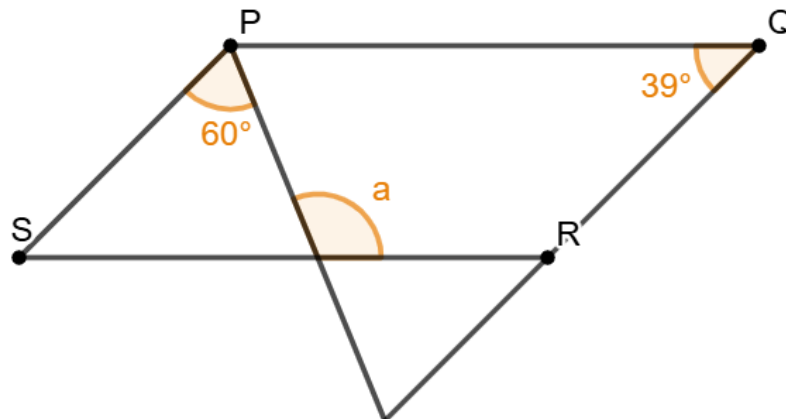
Para que el profesor tenga la máxima cantidad de alumnos, cada alumno debe tener la menor cantidad de hojas posibles. Si tiene un alumno, este debe tener una hoja, si tiene un segundo alumno, este debe tener dos hojas, etc. Podemos hacer la siguiente tabla:

Cantidad alumnos	de	Cantidad mínima hojas	de
1		1	
2		$1 + 2 = 3$	
3		$3 + 3 = 6$	
4		$6 + 4 = 10$	
5		$10 + 5 = 15$	
6		$15 + 6 = 21$	
7		$21 + 7 = 28$	
8		$28 + 8 = 36$	
9		$36 + 9 = 45$	

Si todos los alumnos deben tener al menos una hoja, el profesor máximo puede tener **8 alumnos** porque no tiene suficientes hojas para el 9° alumno.

Si un alumno puede no tener hojas, entonces máximo puede tener **9 alumnos**.

4. En la figura, PQRS es un paralelogramo. ¿Cuánto vale el ángulo a ?



Solución:

Llamemos T al vértice donde se encuentra el ángulo a .

Como el cuadrilátero PQRS es un paralelogramo, entonces sus ángulos opuestos internos son iguales, $\angle PQR = \angle RSP = \angle TSP = 39^\circ$.

PSA es un triángulo, así que la suma de sus ángulos internos debe ser igual a 180° , entonces

$$\angle TSP + \angle SPT + \angle PTS = 180^\circ$$

Sustituyendo los valores conocidos



$$39^\circ + 60^\circ + \angle PTS = 99^\circ + \angle PTS = 180^\circ$$

$$\rightarrow \angle PTS = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$$

El ángulo $\angle RTP$ que tiene como medida a , es suplementario al ángulo $\angle PTS$, ya que la línea entre S y R es una recta, entonces

$$\angle RTP + \angle PTS = 180^\circ$$

Sustituyendo

$$a + 81^\circ = 180^\circ$$

$$a = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$$

Por lo tanto, el ángulo a mide 99° .

5. Uma y Ale fueron por gorditas a un puesto. Ambas pidieron la misma cantidad de gorditas, las cuales cuestan \$25 sin queso y \$30 con queso. Ale pidió el doble de gorditas de queso que Uma. Si entre las dos pagaron \$165, ¿cuántas gorditas pidieron entre ambas?

Solución:

Digamos que Q_U = cantidad de gorditas de queso que pidió Uma, S_U = cantidad de gorditas sin queso que pidió Uma, Q_A = cantidad de gorditas de queso que pidió Ale y S_A = cantidad de gorditas sin queso que pidió Ale.

Sabemos que

$$Q_A = 2Q_U \text{ y } Q_A + S_A = Q_U + S_U$$

Sustituyendo

$$2Q_U + S_A = Q_U + S_U$$

$$\rightarrow Q_U + S_A = S_U$$

$$\rightarrow S_A = S_U - Q_U$$

También sabemos que

$$25(S_A + S_U) + 30(Q_A + Q_U) = 165$$

Sustituyendo los valores de S_A y Q_A

$$25(S_U - Q_U + S_U) + 30(2Q_U + Q_U) = 165$$

$$\rightarrow 25(2S_U - Q_U) + 30(3Q_U) = 165$$

Desarrollando

$$50S_U - 25Q_U + 90Q_U = 165$$

Factorizando

$$50S_U + 65Q_U = 165$$

$$\rightarrow \frac{50S_U + 65Q_U}{5} = \frac{165}{5}$$

$$10S_U + 13Q_U = 33$$

Se puede ver que Uma tuvo que haber comprado una gordita de queso ($Q_U = 1$) y dos gorditas sin queso ($S_U = 2$), comprando en total 3 gorditas. Como Ale compró la misma cantidad de gorditas que Uma, entre las dos compraron $3 + 3 = 6$ gorditas.

6. ¿Para cuántos valores enteros positivos de n la expresión $\frac{90}{n+8}$ es un entero?

Solución:

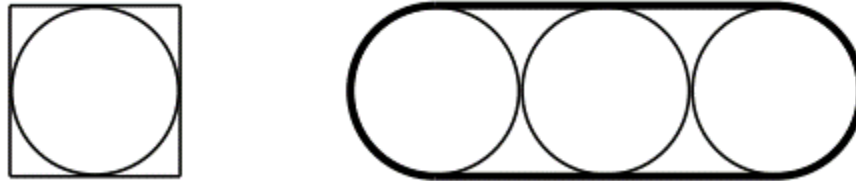


Descomponiendo el 90 en números primos vemos que $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, así que sus divisores son 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45 y 90.

Como n es un número positivo, entonces $n + 8$ no puede ser 1, 2, 3, 5 ni 6, pero sí puede ser 9, 10, 15, 18, 30, 45 o 90.

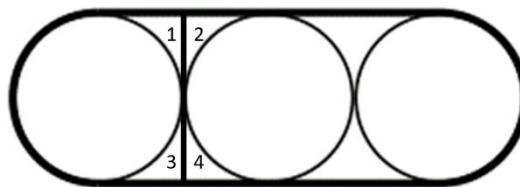
Por lo tanto, n puede ser **7 valores distintos**.

7. En un mundo extraño, el área del cuadrado de la primera figura es 15 y el área de cada uno de los círculos es 10. ¿Cuánto vale el área encerrada dentro de la línea gruesa?



Solución:

Si trazamos una recta tangente al primer y segundo círculo se forman las cuatro figuras marcadas en la siguiente figura.



Si moviéramos las figuras 2 y 4 a la izquierda del primer círculo, se puede ver que se formaría un cuadrado igual al original. El área de las 4 figuras más el área del primer círculo es igual a 15 (área del cuadrado) lo mismo pasaría al hacer una línea tangente al segundo y tercer círculo.

Por lo tanto, el área encerrada en la línea gruesa es igual a $15 + 15 + 10 = 40$.

8. Elías cuenta los números del 1 al 100 y se come un chocolate si el número que dice es múltiplo de 3 o termina en 3. ¿Cuántos chocolates se comerá Elías en total?

Solución:

Del 1 al 99 hay $\frac{99}{3} = 33$ números que son múltiplos de 3, ya que cada 3 números aparece otro múltiplo.

Del 1 al 100 hay 10 números que terminan en 3, los números de la forma $A3$ donde A es un número del 0 al 9, pero los números 3, 33, 63 y 93 ya se contaron, al ser múltiplos de 3.

Entonces Elías se comerá $33 + 10 - 4 = 39$ chocolates.

9. Usando hilos y clavos en un círculo que dibujó en un pedazo de madera, Juanito quiere hacer un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular, un



hexágono regular y un octágono regular, colocando los clavos en el perímetro del círculo. ¿Cuántos clavos necesita como mínimo?

Solución:

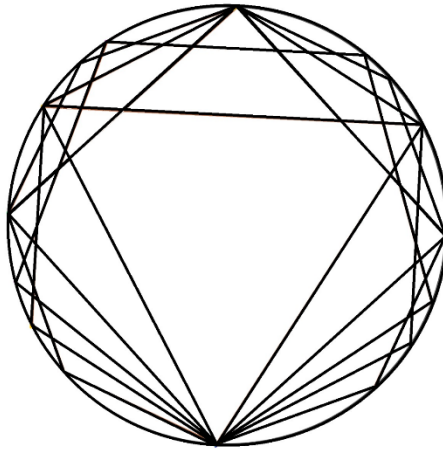
Si dibujamos un hexágono regular $ABCDEF$ y unimos los vértices ACE , los triángulos ABC , CDE y EFA son congruentes (iguales) porque tienen dos lados con la misma medida $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ y el ángulo entre sus lados con la misma medida también es el mismo $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA$, ya que los ángulos internos de un polígono regular son iguales. Entonces, como los triángulos ABC , CDE y EFA son iguales, entonces sus lados AC , CE y EA también serán iguales, por lo tanto, el triángulo ACE es equilátero.

Si Juanito coloca los clavos necesarios para formar un hexágono, no es necesario que coloque más clavos para el triángulo equilátero, sólo sería necesario unir los clavos con hilo. Lo mismo pasa al colocar los clavos para el octágono, no es necesario poner más clavos para el cuadrado.

Para colocar menos clavos, puede iniciar cada figura desde un mismo clavo.

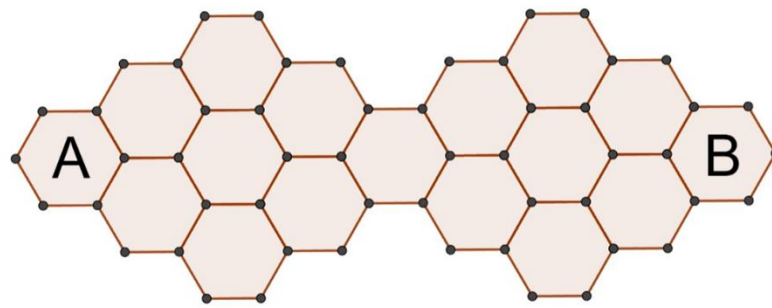
Como el hexágono y octágono tienen una cantidad par de vértices, si se juntaran sus vértices opuestos, se formaría un eje de simetría de la figura y del círculo, por lo tanto, los ejes de simetría también serían diámetros del círculo. Si el hexágono y octágono comparten un clavo, también compartirán el opuesto con el que se formaría el diámetro.

Entonces, para formar el pentágono necesitaría 5 clavos, para el hexágono otros 5 (ya que usaría uno de los clavos del pentágono) y para el octágono otros 6 (quitando los 2 que comparte con el hexágono). Juanito usaría $5 + 5 + 6 = 16$ clavos..



10. La abeja Tzoali está en el hexágono A, y este quiere llegar al hexágono B. Tzoali estando en un hexágono se puede mover a otro si comparten un lado y está a la derecha de él (es decir adelante). ¿De cuántas formas puede llegar del hexágono A al hexágono B?

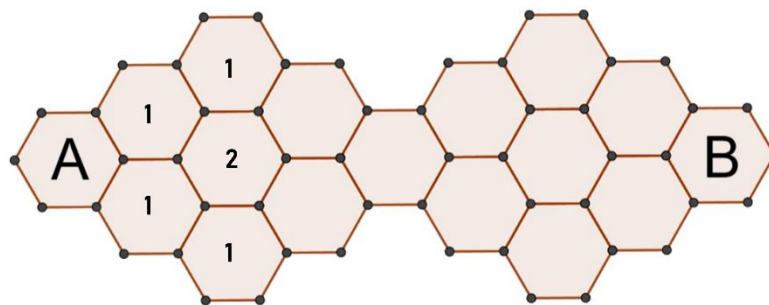




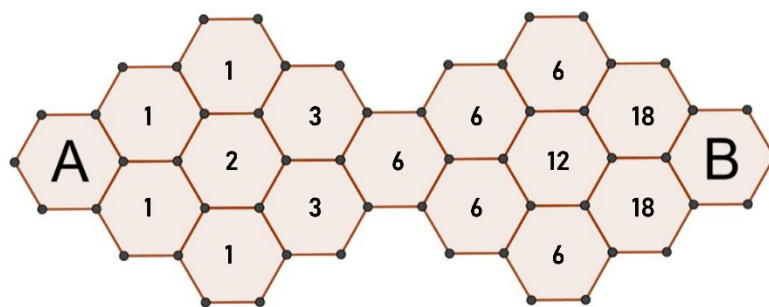
Solución:

A los dos hexágonos que están en la segunda columna sólo se puede llegar de una forma, ir del hexágono inicial a cada uno de ellos.

Al primer hexágono de la tercera columna sólo hay una forma de llegar, ya que tuvo que haber pasado por el primer hexágono de la segunda columna y sólo había una forma de llegar a él. Al segundo hexágono se puede llegar de dos formas, porque puede haber pasado por el primer o segundo hexágono de la segunda columna, y a cada uno de ellos pudo haber llegado de una forma. Al tercer hexágono de la tercera columna sólo se puede llegar de una forma, ya que tuvo que haber pasado por el segundo hexágono de la segunda columna y sólo había una forma de llegar a él.



Si se repite este procedimiento, se puede ver que, para ver de cuántas formas puede llegar a un hexágono H , es necesario sumar la cantidad de formas en las que pudo haber llegado a los hexágonos que comparten un lado con el hexágono H y estén a la izquierda de él. De esta forma podemos calcular la cantidad de caminos a todos los hexágonos.



La abeja Tzoali puede llegar al hexágono *B* de $18 + 18 = 36$ formas distintas.

11. Sandra, Rogelio y Roberto están jugando. Sandra dice un número de tres cifras. Rogelio suma las tres cifras del número de Sandra y dice el resultado. Roberto suma las cifras del número que dijo Rogelio y dice el resultado. ¿Cuál es el número más grande que pudo haber dicho Roberto?

Solución:

El número más grande que puede decir Rogelio es el 27, que sería posible si Sandra dice el número 999.

Si Rogelio dice los números del 1 al 27, el mayor número que puede decir Roberto es el 10, que sería posible si Rogelio dice el número 19, que sería posible si, por ejemplo, Sandra dice el número 199.

Por lo tanto, el número más grande que pudo haber dicho Roberto es el 10.

12. Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10 en un sobre. Emilio pinta de rojo las tarjetas con los números 2, 3, 5, 8 y 9; el resto de las tarjetas las pinta de color azul. Si Josué quiere hacer parejas de una tarjeta roja, con una tarjeta azul, ¿de cuántas formas puede hacer las parejas si quiere que la suma de las parejas sea 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir)?

Solución:

Veamos cuáles parejas de tarjetas rojas con tarjetas azules tienen una suma entre 9 y 13.

Tarjetas rojas	Posibles tarjetas azules
2	7, 10
3	6, 7, 10
5	4, 6, 7
8	1, 4
9	1, 4

Si la tarjeta **8** hace pareja con la tarjeta **1** su suma sería de 9 y la tarjeta **9** haría pareja con la **4**, teniendo una suma de 13. Entonces la tarjeta **2** no podría hacer pareja con la tarjeta 7, pues tendría una suma de 9, que estaría repetida; tiene que hacer pareja con la tarjeta **10**, teniendo una suma de 12. De la misma forma, la tarjeta **3** no puede hacer pareja con la tarjeta 6, tiene que hacer pareja con la **7**, teniendo una suma de 10. Por último, la tarjeta **5** haría pareja con la **6** teniendo una suma de 11.

Tarjetas rojas	Tarjetas azules	Suma
2	10	12
3	7	10
5	6	11
8	1	9
9	4	13

Como ninguna suma se repite, este es un acomodo válido.



Por otro lado, si la tarjeta **8** hace pareja con la **4**, tendría una suma de 12. La tarjeta **9** tendría que hacer pareja con la **1**, teniendo una suma de 10. La tarjeta **2** tiene que estar emparejada con la **7**, teniendo una suma de 9, ya que con la 10 repetiría una suma. La tarjeta **3** sólo puede hacer pareja con la **10**, teniendo una suma de 13. Por último, la tarjeta **5** tiene que hacer pareja con la **6**, teniendo una suma de 11.

Tarjetas rojas	Tarjetas azules	Suma
2	7	9
3	10	13
5	6	11
8	4	12
9	1	10

Como ninguna suma se repite, este también es un acomodo válido.

Ya se vieron todas las opciones para la tarjeta 8, entonces no hay más acomodos posibles. Emilio sólo puede formar las parejas de **2 formas distintas**.

