Soluciones del Primer Examen Eliminatorio

1. Óscar se está preparando para su concierto, ve el reloj y ve que la hora está conformada por un solo dígito, son las $5:55$pm. El concierto de Óscar será a la siguiente hora que esté conformada por un sólo dígito. ¿Cuántos minutos faltan para el concierto?

Solución:

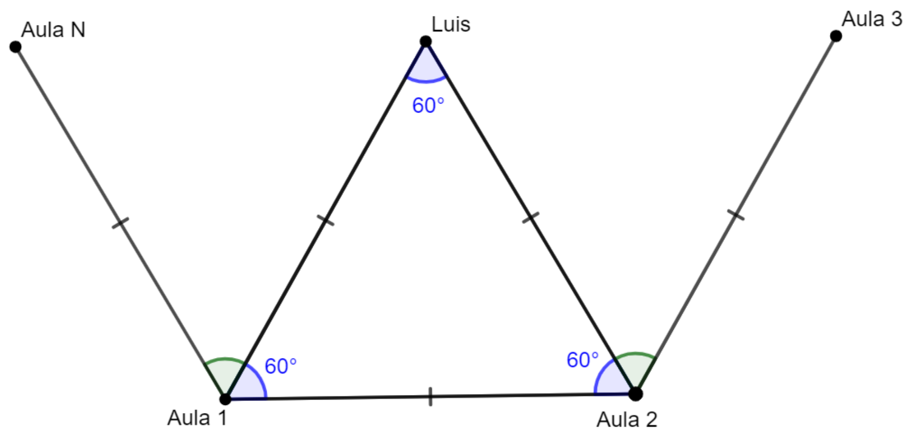
La siguiente hora que estará conformada por un solo dígito será $11:11$pm. A partir de las $5:55$pm faltan 5 minutos para las $6:00$pm, 5 horas para las $11:00$pm y 11 minutos para las $11:11$pm.

Faltan $5 + 5 * 60 + 11 = 16 + 300 = \mathbf{316}$ **minutos** para el concierto

2. Luis se encuentra en el centro de su escuela, la cual tiene forma de polígono regular, las aulas se encuentran en los vértices del polígono. Las aulas están numeradas en orden del sentido de las manecillas del reloj. Empezando por el aula 1, luego la 2, etc. Luis sabe que él se encuentra a la misma distancia al aula 3, que la distancia que hay del aula 1 a la 2. ¿Cuántas aulas tiene su escuela?

Solución:

Como Luis se encuentra en el centro de su escuela, y sabes que la distancia de Luis al aula 1 es la misma que del aula 1 a la 2, entonces Luis también se encuentra a la misma distancia al aula 2. Por lo tanto, el triángulo que se forma entre Luis, el aula 1 y el aula 2, es un triángulo equilátero, un triángulo con todos sus lados y ángulos de la misma medida. Los ángulos al ser iguales tendrán una medida de $60°$.



Como la escuela tiene forma de un polígono regular, la distancia del aula 2 al aula 3 será la misma que del aula 1 al aula 2. Por lo que el triángulo que se forma entre Luis, el aula 2 y el aula 3 también será un triángulo equilátero. La medida del ángulo entre un aula x, Luis y el aula $x + 1$ siempre será de $60°$.

Para conocer cuántas aulas tiene la escuela de Luis hay que conocer cuántos ángulos de $60°$ se pueden colocar alrededor de Luis hasta formar un círculo (ya que Luis se encuentra en el centro).

La escuela de Luis tiene $\frac{360°}{60°} = \mathbf{6}$ **aulas**.

3. En el tianguis están vendiendo 2024 dulces de colores, de los cuales, 1234 son amarillos, 567 son azules, 222 son rojos, y el resto son de un color diferente a los anteriores. Si una persona compra dulces al azar sin ver el color, ¿Cuál es la cantidad mínima de dulces que debe comprar para asegurarse de llevarse 2 dulces de color distinto?

Solución:

Primero calcularemos cuántos dulces son de un color distinto, $2024 - 1234 - 567 - 222 = 2024 - 2023 = 1$ dulce de color distinto.

Si la persona compra 1234 dulces o menos, podría agarrar todos los dulces de color amarillo.

Si la persona compra 1235 dulces, en el peor de los casos, compraría 1234 dulces amarillos y 1 de un color distinto. Por lo tanto, la mínima cantidad de dulces que debe de comprar para asegurarse de llevarse 2 dulces de color distinto, es $\mathbf{1235}$ **dulces**.

4. X y Y son dos números enteros positivos, si $X + Y = 15$ y $X - Y = 5$, ¿Cuánto es el resultado de la multiplicación $X * Y$?

Solución:

Tenemos dos ecuaciones:

$$X + Y = 15$$

$$X - Y = 5$$

Si sumamos ambas ecuaciones obtendremos:

$$2X = 20$$

Despejando X

$$\rightarrow X = \frac{20}{2} = 10$$

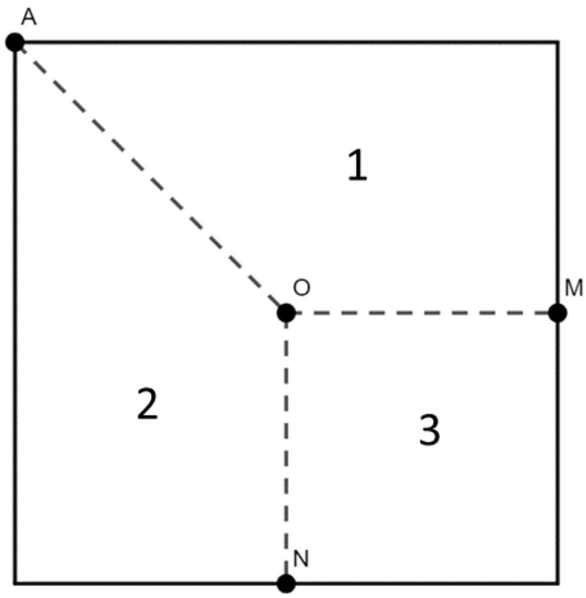
Sustituyendo y despejando Y

$$\rightarrow 10 + Y = 15$$

$$\rightarrow Y = 15 - 10 = 5$$

Por lo tanto, el resultado de la multiplicación $X * Y$ es $10 * 5 = \mathbf{50}$.

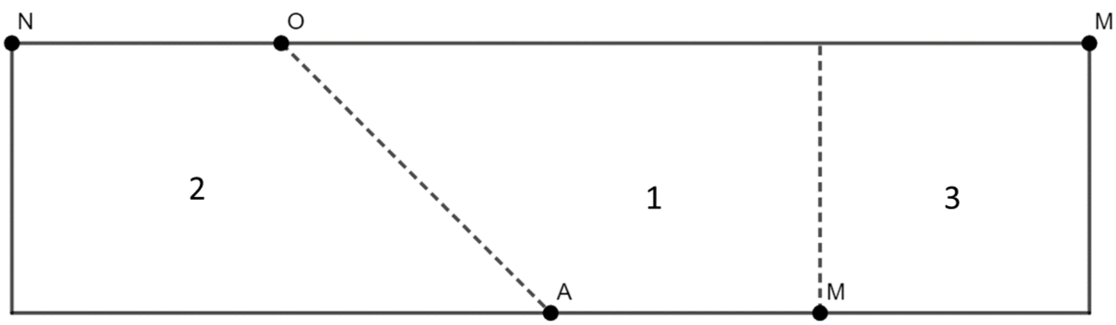
5. El cuadrado de la figura tiene un perímetro de $48cm$, M y N son puntos medios de los lados, O es el centro del cuadrado, y A es un vértice. Juanito cortó el cuadrado por las líneas punteadas y, usando los pedazos resultantes, hizo un rectángulo de la misma área, pero diferente perímetro. ¿Cuál es ese perímetro?



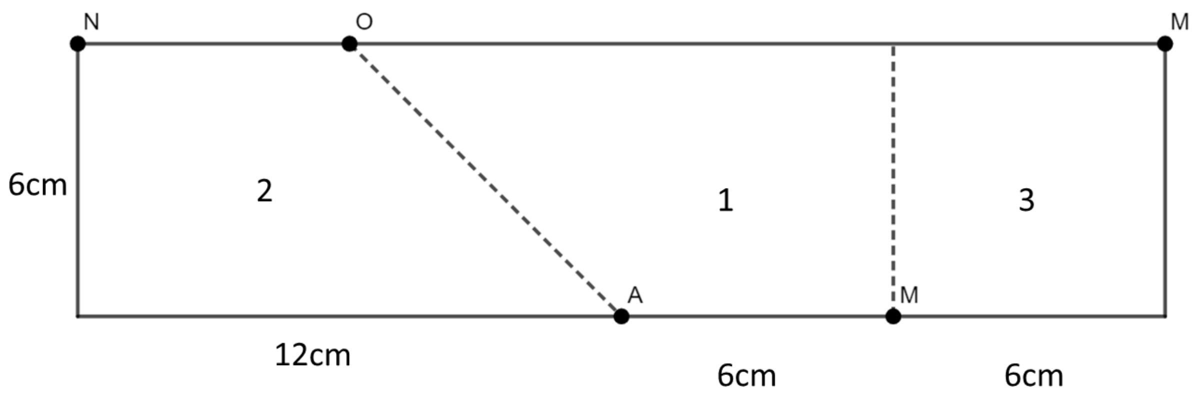
Solución:

Como el perímetro del cuadrado es de 48cm, entonces la medida de cada lado es de $12cm$. Los lados del cuadrado con vértices O, N, M tienen una medida de $6cm$ porque N y M son puntos medios del cuadrado grande.

El cuadrilátero 2 se puede rotar para que su lado OA encaje con el lado OA del cuadrilátero 1. Después el cuadrado 3 se coloca a la derecha (o izquierda) del rectángulo resultante.

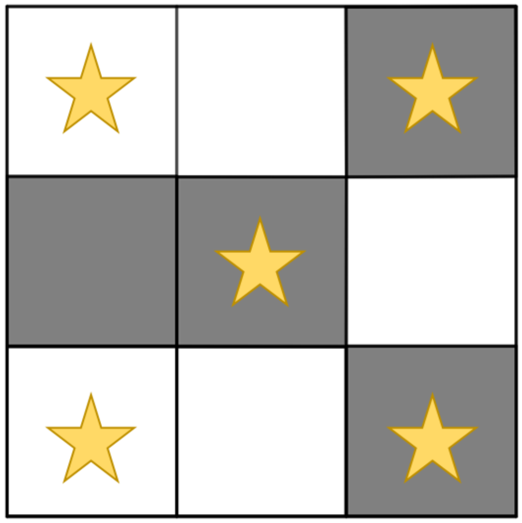


Colocando las medidas que conocemos



El perímetro del rectángulo es $2 * (6 + 12 + 6 + 6)cm = 2 * (30)cm = \boldsymbol{60cm}$.

6. Uma quiere numerar del 1 al 9 los cuadrados del tablero de la figura, de modo que la suma de dos números en cuadrados adyacentes (que comparten un lado) sea un número impar. Stephie quiere que la suma de los números en los cuadrados sombreados sea la mayor posible. ¿Cuál es la suma de los números en los cuadrados blancos?



Solución:

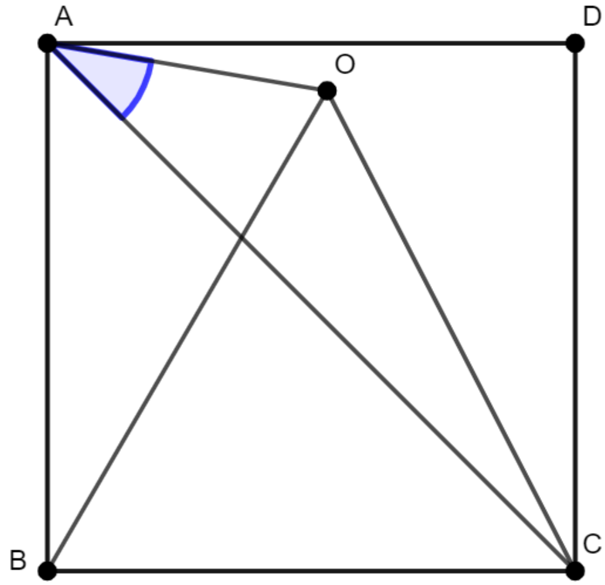
Si la suma de cualesquiera dos números adyacentes da como resultado un número impar, entonces dos números adyacentes no pueden ser los dos pares o los dos impares, los números adyacentes deben tener distinta paridad, un número par y el otro impar.

Colocando los números impares en las casillas con una estrella, estos no serán adyacentes entre ellos. En las otras casillas se colocarán los números pares. Se colocan de esta forma porque del 1 al 9 hay cinco números impares y cuatro pares.

Como Stephie quiere maximizar la suma de las casillas sombreadas, en estas se colocarán los números pares o impares más grandes, dependiendo si tienen estrella o no. Los números en las casillas sombreadas serán: $9, 8, 7$ y 5.

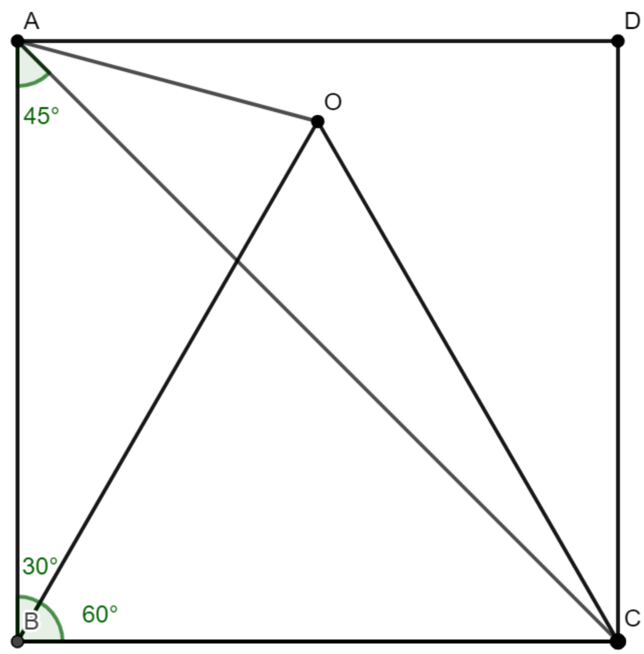
En las casillas blancas se colocarán los números faltantes: $6, 4, 3, 2$ y 1. La suma de los números en las casillas blancas es $6 + 4 + 3 + 2 + 1 = \mathbf{16}$.

7. En la figura, $ABCD$ es un cuadrado y OBC un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo marcado?



Solución:

Marcamos los ángulos conocidos. Los ángulos interiores de un cuadrado miden $90°$, los ángulos interiores de un triángulo equilátero miden $60°$. La diagonal AC parte a la mitad a los ángulos rectos en A y C.



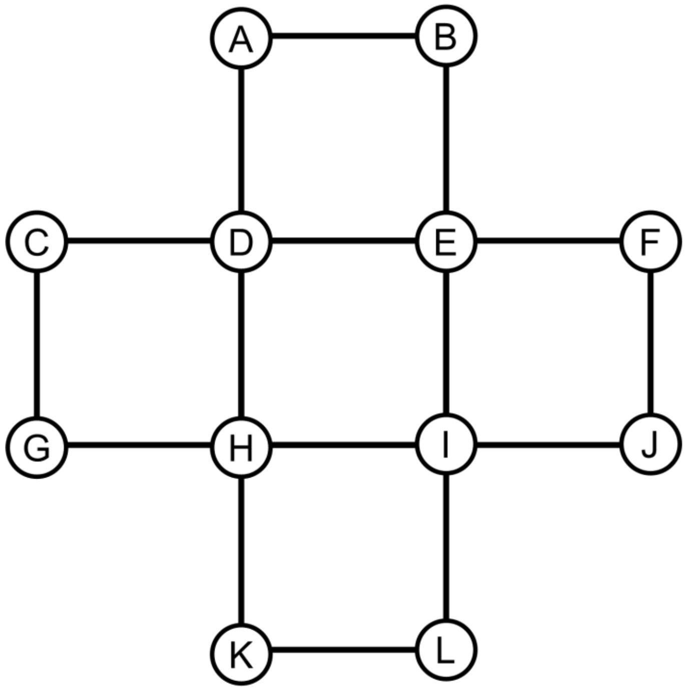
Como $ABCD$ es un cuadrado, $AB = BC = CD = AD$. Como OBC es un triángulo equilátero, $OB = BC = CO$. Entonces $AB = BO$, el triángulo ABO es isósceles. Por lo tanto $\angle BAO = \angle AOB$.

Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo da como resultado $180°$, entonces $\angle BAO + < \angle AOB + \angle OBA = 180° \rightarrow 2\angle BAO + 30° = 180° \rightarrow \angle BAO = \frac{180°-30°}{2} = \frac{150°}{2} = 75°$.

$$\angle BAO = 75° = \angle BAC + \angle CAO = 45° + \angle CAO \rightarrow \angle CAO = 75° - 45° = 30°$$

La medida del ángulo marcado en la primera figura es de $\mathbf{30}°$.

8. En la figura hay cinco cuadrados. Ariel quiere usar dos colores, rojo y verde, para pintar los 12 vértices, de modo que en cada cuadrado haya dos vértices verdes y dos rojos. ¿De cuántas formas diferentes pueden ser pintados los vértices, si Ariel no puede girar ni rotar la figura?



Solución:

Primero colorearemos el vértice D con un color 1.

Caso a) Si el vértice E lo coloreamos de color 1, entonces A y B tendrán que ser de color 2. También H e I serán de color 2. K y L serán de color 1. En los cuadrados $CGHD$ y $EIJF$, cada uno tiene un vértice de un color distinto. Si escogemos un color para C y para F, el color de G y J ya estará determinado. Hay dos posibilidades para C y dos para F. En este caso hay $2 \times 2 = 4$ formas de colorear los vértices.

Caso b) Si el vértice E lo coloreamos de color 2:

> Caso b1) Si I lo coloreamos de color 2, H tendrá que ser de color 1. C y G serán de color 2, F y J serán de color 1. Al igual que en el caso A, hay dos formas de colorear K y dos formas de colorear A. En este caso hay $2 \times 2 = 4$ formas de colorear los vértices.
>
> Caso b2) Si I lo coloreamos de color 1, H tendrá que ser de color 2. Hay dos formas de colorear C, dos formas de colorear K, dos formas de colorear F y dos formas de colorear A. En este caso hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ formas de colorear los vértices.

En total hay $4 + 4 + 16 = 24$ formas de colorear los vértices con dos colores distintos. Falta determinar qué color será verde y qué color será rojo. El color 1 puede ser verde y el color 2 rojo, o el color 1 puede ser rojo y el color 2 verde.

Ariel puede colorear los vértices de la figura de $24 + 24 =$ **48 formas distintas**.

9. En una sucesión aritmética, se va sumando el mismo número a cada término para obtener el siguiente, la sucesión comienza con 1, y si se suman los primeros 5 términos de esta sucesión, se obtiene 35, ¿cuál será el $6to$ término de la sucesión?

Solución:

Podemos escribir los primeros 6 números de la sucesión como: $1,\ 1+n,\ 1+2n,\ 1+3n,\ 1+4n,$ $1+5n$.

Sabemos que $1+1+n+1+2n+1+3n+1+4n=5+(1+2+3+4)n=5+10n=35$

$$\rightarrow 1+2n=7$$

$$\rightarrow 2n=6$$

$$\rightarrow n=\frac{6}{2}=3$$

Por lo tanto, el $6to$ término de la sucesión será $1+5n=1+5(3)=1+15=\mathbf{16}$.

10. Ozzy tiene 55 cubos del mismo tamaño, siendo 10 de ellos rojos, 15 azules, y 30 verdes. Ozzy quiere construir una torre apilando los cubos de manera que dos cubos vecinos sean de diferente color. ¿Cuál es la máxima cantidad de cubos que podrá apilar?

Solución:

Trataremos de construir una torre usando la mayor cantidad de cubos verdes, para esto, entre cada cubo verde pondremos un cubo de un color distinto.

La torre empezará intercalando 11 cubos verdes y 10 cubos rojos. Empezando y terminando en un cubo verde. En esta sección de la torre no es conveniente usar cubos azules, ya que estos nos servirán para colocar más cubos verdes; y queremos usar la mayor cantidad de cubos verdes posible.

Después intercalaremos 15 cubos azules y 15 cubos verdes. Empezando con uno azul y terminando con uno verde. Esta sección la colocaremos encima de la sección anterior.

De esta forma habremos colocado todos los cubos rojos y azules. Sobrarán 4 cubos verdes, pero estos no se podrán colocar en ninguna parte de la torre, ya que la torre está formada por 26 cubos verdes intercalados con 25 cubos de un color distinto. Si colocaramos otro cubo verde en cualquier parte, siempre se juntarían dos cubos verdes, lo cual es imposible.

La mayor cantidad de cubos que Ozzy puede apilar son $\mathbf{51}$.

11. Emiliano se encuentra revisando $2024 + 24$ exámenes que tiene en una pila. El examen que está hasta arriba pertenece al participante 1, el siguiente al 2, etc. El último examen pertenece al participante $2024 + 24$.

Emiliano está cansado de revisar y aplicará un método inmoral. El examen que tiene hasta arriba lo agarra y lo pone al final de la pila, el siguiente examen lo reprueba y lo regresa al participante. Repite este proceso hasta que le quede un examen.

El último examen con el que se queda Emiliano, lo aprueba.
¿Cuál es el número de participante que aprobó?

Solución:

En total Emiliano tiene 2048 exámenes. Después de hacer el proceso con los 2048 exámenes, le quedarán 1024 exámenes sin reprobar, los exámenes serán de los participantes impares $(1,3,5,7,9,11, \dots, 2047)$.

Como el último examen que reprobó fue el 2048, cuando continue con el proceso el examen 1 no será reprobado, el siguiente sí. Enumeraremos del 1 al 1024 los exámenes restantes, $1 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2, 5 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 4, 9 \rightarrow 5, 11 \rightarrow 6, \dots,\ 2047 \rightarrow 1024$. De esta forma nos quedaran de nuevo los números impares, de la última enumeración. Serán 512 exámenes.

Siempre que en el proceso anterior tengamos una cantidad par de exámenes, en el siguiente paso, después de enumerar los exámenes del 1 a N, eliminaremos a los números pares. De esta forma Emiliano pasará de 2048 exámenes a $1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2$ y 1 examen.

En cada proceso se eliminaron a los exámenes con un número par hasta llegar a un examen. Este examen será el del participante 1, ya que en cada en cada enumeración este no cambió de número y al ser impar nunca se reprobó.

El participante que aprobó fue el **1**.

12. Dember escribe 3 dígitos en su libreta. Se da cuenta que, si forma un número de tres cifras usando cada uno de los dígitos que anotó en su libreta, el número será un cuadrado perfecto.
Después forma un número distinto de tres cifras usando los mismos dígitos y también es un cuadrado perfecto.
Lo intenta una vez más, forma un número de tres cifras distinto a los dos anteriores usando los mismos dígitos y forma otro cuadrado perfecto.
¿Cuál es resultado de multiplicar los 3 dígitos que escribió originalmente en su libreta?

Nota: un número es un cuadrado perfecto si se puede escribir como la multiplicación de dos números enteros iguales. Por ejemplo, $4 = 2 * 2$.

Solución:

Podemos comprobar todos los números cuadrados del 1^2 al 32^2 y ver los dígitos que tienen.

Los tres números cuadrados que tienen los mismos dígitos son $13^2 = 169, 14^2 = 196$ y $31^2 = 961$.

El resultado de multiplicar los 3 dígitos que Dember escribió originalmente en su libreta será $1 \times 6 \times 9 = \mathbf{54.}$