38 OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS EN AGUASCALIENTES

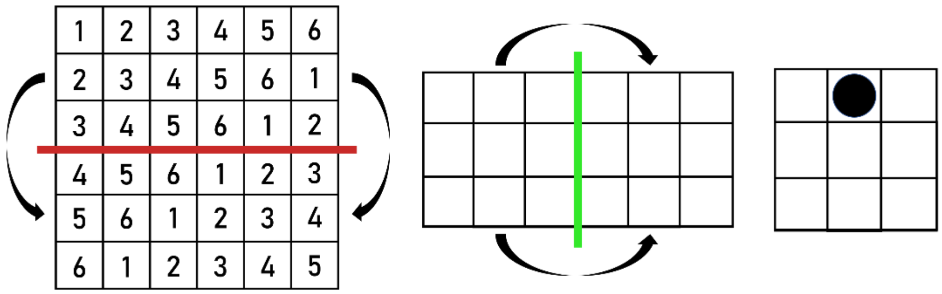
Soluciones del Segundo Examen Eliminatorio

1. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte del pastel que hay en el momento de cortar. Después de cortar tres veces, queda una fracción irreducible del pastel original. Si la fracción irreducible se escribe de la forma $\frac{a}{b}$, ¿cuál es el valor de $a+b$? Por ejemplo, si quedará $\frac{1}{3}$ del pastel, $a=1, b=3$ y $a+b=4$.
Nota: una fracción irreducible es aquella que está en su forma más simplificada, es decir, cuando el numerador y denominador no tienen ningún factor en común.

Solución:

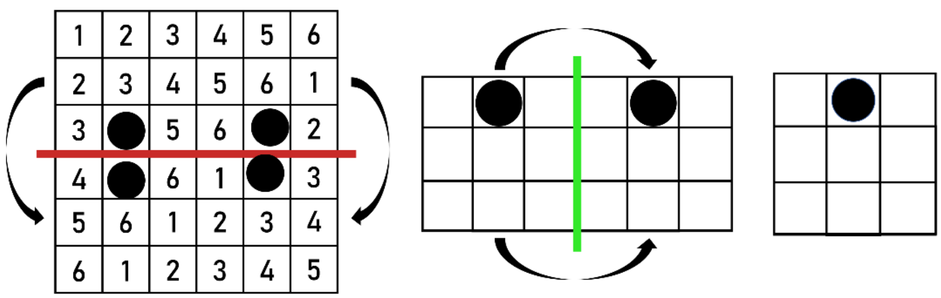
En el primer corte, después de quitar $\frac{1}{3}$ del pastel, quedarán $\frac{2}{3}$. En el segundo corte quedarán $\frac{2}{3}$ de los $\frac{2}{3}$, es decir $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. En el tercer corte quedarán $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{9}$, es decir $\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{27}$.
La fracción $\frac{8}{27}$ es irreducible, pues 8 y 27 no tienen ningún factor en común.
El valor de $a+b$ es $8+27=\mathbf{35}$.

2. Fernanda dobla la cuadrícula de números dos veces como se muestra. Después hace un hoyo en el círculo negro marcado. ¿Cuál es la suma de los números por los que se hizo la perforación?



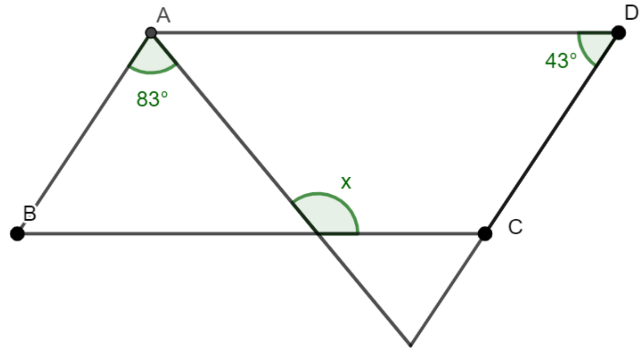
Solución:

Si “desdoblamos” la hoja que Fernanda dobló, tendremos:



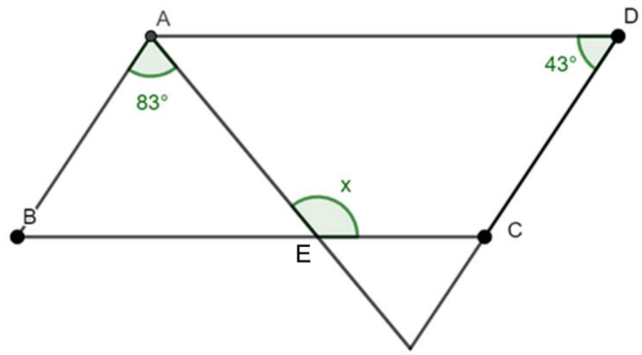
La suma de los números por los que se hizo la perforación será $4 + 5 + 1 + 2 = \mathbf{12}$.

3. En la siguiente figura $ABCD$ es un paralelogramo. ¿Cuál es la medida en grados de x?



Solución:

Como $ABCD$ es un paralelogramo, el ángulo $\angle CBA$ tiene la misma medida que el ángulo $\angle ADC = 43°$.



En el triángulo ABE, el ángulo en A mide $83°$, el ángulo en B mide $43°$, por lo que el ángulo en E tiene que medir $180° - 83° - 43° = 54°$.
El ángulo x es el ángulo suplementario del ángulo $\angle AEB = 54°$. Entonces, el ángulo x mide $180° - 54° = \mathbf{126}°$.

4. Los cuadrados elegantes, son aquellos cuadrados perfectos que terminan en 9.

Ricky, un caballero elegante quiere ser el más elegante de los elegantes, por lo cual debe sumar los primeros 38 cuadrados elegantes sin calculadora. Lo cual es una hazaña nunca antes lograda. Sin embargo, Ricky llega ante el congreso de los elegantes, con el último dígito del resultado, y consideran que es prueba suficiente de que él lo logró. ¿Cuál es el dígito que dio Ricky?

Nota: un número es un cuadrado perfecto si se puede escribir como la multiplicación de dos números enteros iguales. Por ejemplo, $4 = 2 \times 2$.

Solución:

Queremos saber cuál fue el dígito que dio Ricky. Sólo nos interesa calcular la suma del dígito de las unidades de los primeros 38 cuadrados, ya que cualquier otro digito (en las decenas, centenas, etc.) nunca cambiará el valor que tenga en las unidades.

Los cuadrados elegantes tienen la propiedad de que su dígito de las unidades es 9. La suma del dígito de las unidades de los primeros 38 cuadrados elegantes es $38 \times 9 = 342$.

El dígito que dio Ricky será el dígito de las unidades de 342, es decir, $\mathbf{2}$.

5. ¿Cuánto es la suma de las cifras del número $N = 10^{92} - 92$? Nota: 10^{92} es el número representado con un 1 seguido de noventa y dos $0s$, $1000 \cdots 000$.

Solución:

Como 10^{92} tiene 93 dígitos, un 1 y noventa y dos 0s, $10^{92} - 92$ tendrá 92 dígitos.
Al restar 92 a 10^{92}, el resultado será de la forma $999 \cdots 9908$. Como el número tiene 92 dígitos, noventa serán 9s, uno un 0 y uno un 8.
La suma de los dígitos de N será $9 \times 90 + 0 \times 1 + 8 \times 1 = 810 + 0 + 8 = \mathbf{818}$.

6. Tzoali está formando varios exámenes para la OMMAGS. Tiene 10 nombres de olímpicos que participaron en años pasados en la Olimpiada y en cada problema de los exámenes quiere usar el nombre de algún olímpico.

Tzoali tiene que formar un examen con $5, 6$ o 7 problemas. Él escribe todos los distintos exámenes que puede formar de forma que cada problema use el nombre de un solo olímpico. Un nombre lo pudo haber usado en uno, varios o ninguno de los problemas de un examen.

¿Cuántos de esos exámenes tienen el mismo nombre en el primer y último problema?

Solución:

Contemos cuántos exámenes diferentes, de 5 problemas, se pueden formar tales que el primer y último problema tengan el mismo nombre:

- Seleccionemos un nombre para el primer y último problema. Hay 10 posibles, entonces hay 10 formas de escoger el nombre del primer y último problema.
- Seleccionemos el nombre para el segundo, tercer y cuarto problema. Para cada uno hay 10 nombres, es decir, hay $10 \times 10 \times 10 = 10^3$ formas.

En un examen de 5 problemas hay $10 \times 10^3 = 10^4$ exámenes diferentes que tienen el mismo nombre en el primer y último problema.

De la misma forma, para los exámenes de 6 problemas:

- Hay 10 formas de escoger el nombre para el primer y último problema.
- Hay $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ formas de escoger el nombre para el segundo, tercero, cuarto y quinto problema.

En un examen de 6 problemas hay $10 \times 10^4 = 10^5$ exámenes diferentes que tienen el mismo nombre en el primer y último problema.

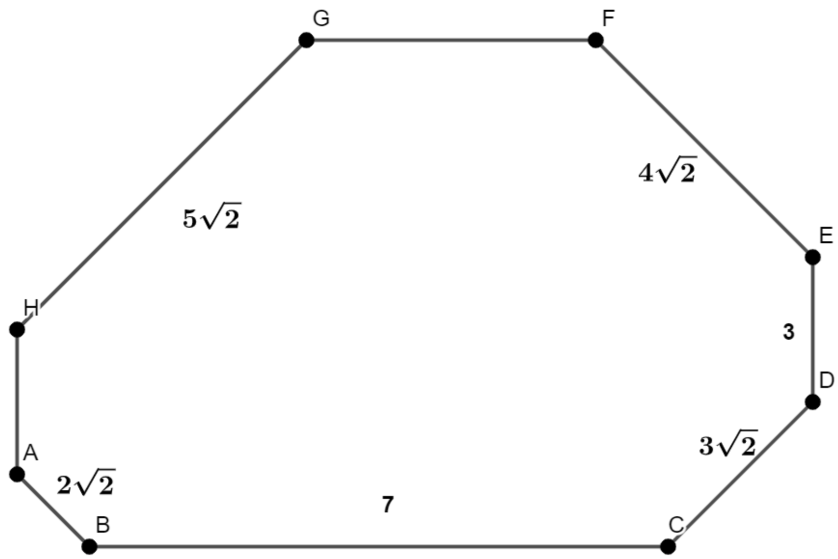
Para los exámenes de 7 problemas:

- Hay 10 formas de escoger el nombre para el primer y último problema.
- Hay $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ formas de escoger el nombre para el segundo, tercero, cuarto, quinto y sexto problema.

En un examen de 7 problemas hay $10 \times 10^5 = 10^6$ exámenes diferentes que tienen el mismo nombre en el primer y último problema.

En total, Tzoali escribió $10^6 + 10^5 + 10^4 = \mathbf{1,110,000}$ exámenes distintos que tienen el mismo nombre en el primer y último problema.

7. Rogelio cortó las esquinas de una hoja rectangular, y obtiene el octágono equiangular (todos sus ángulos miden lo mismo) ABCDEFGH, como se muestra en la figura. Sabiendo que $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 7$, $CD = 3\sqrt{2}$, $DE = 3$, $EF = 4\sqrt{2}$, y $GH = 5\sqrt{2}$, determina el área del octágono.



Solución:

Si extendemos las rectas BC y DE hasta un punto X. Como el octágono rectangular es equiangular, el triángulo rectángulo XCD es isósceles ya que sus ángulos $\angle XCD$ y $\angle CDX$ son suplementarios de los ángulos $\angle DCB$ y $\angle EDC$. Por lo que $XC = XD$.

Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$XC^2 + XD^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \to 2XD^2 = 18 \to XD^2 = 9 \to XD = XC = 3$$

De la misma forma podemos saber las medidas de los lados de los triángulos que Rogelio recortó. El triángulo con hipotenusa $2\sqrt{2}$, tiene lados con medida 2, El triángulo con hipotenusa $4\sqrt{2}$, tiene lados con medida 4.

El rectángulo original tiene área $(2 + 7 + 3) \times (3 + 3 + 4) = 12 \times 10 = 120$.

Los triángulos rectángulos que Rogelio recortó tienen área $\frac{2^2}{2}, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{2}$ y $\frac{5^2}{2}$. La suma de las áreas de los triángulos es $\frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} + \frac{5^2}{2} = \frac{2^2+3^2+4^2+5^2}{2} = \frac{4+9+16+25}{2} = \frac{54}{2} = 27$.

El área del octágono tiene área $120 - 27 = \mathbf{93}$.

8. Yeudiel se encuentra en la parada del camión fuera de la UAA, se da cuenta de que los camiones pasan cada 3 minutos. Además, sabe que los camiones siguen el siguiente patrón: Si primero pasa el camión de una determinada ruta, el número de ruta del segundo camión que pase disminuye en 1 respecto al camión anterior; el número de ruta del tercer camión que pase aumenta en 2 respecto al anterior; y el próximo disminuye en 3 respecto al anterior, etc. Si hace 3 minutos pasó la ruta 43 y en este momento llegó la ruta 45, ¿Cuántos minutos, Yeudiel tendrá que esperar para tomar la ruta 35?

Solución:

Como pasó la ruta 43 y después la ruta 45, el número de ruta aumentó en 2, por lo que la siguiente ruta disminuirá en 3. Las rutas que pasarán serán $(43 \rightarrow 45 \rightarrow 42 \rightarrow 46 \rightarrow 41 \rightarrow \cdots)$. Podemos ver que después que las rutas que pasan cada 6 minutos aumentan o disminuyen en 1. Después de $6 \times 8 = 48$ minutos de pasar la ruta 43, pasará la ruta 35.

Yeudiel esperará $48 - 3 = \mathbf{45}$ minutos desde que pasó la ruta 45 para que pase la ruta 35.

9. A cada número natural de dos cifras se le asigna un dígito de la siguiente manera: Se multiplican sus cifras, si el resultado es un dígito, este es el dígito asignado. Si el resultado es un número de dos cifras, se multiplican estas dos cifras, y si el resultado es un dígito, este es el dígito asignado. En caso contrario, se repite la operación. Por ejemplo, el dígito asignado a 23 es el 6 pues $2 \times 3 = 6$; el dígito asignado a 93 es el 4 pues $9 \times 3 = 27, 2 \times 7 = 14, 1 \times 4 = 4$. ¿A cuántos números de dos cifras se les asigna el número 8?

Solución:

Veremos las parejas de dígitos que multiplicados den como resultado 8. Con esas parejas formaremos todos los posibles números de dos dígitos. Después buscaremos las parejas de dígitos para los nuevos números y repetiremos el proceso.
Viendo las parejas de dígitos que multiplicados dan como resultado 8, tenemos 1×8 y 2×4.

a) Caso 18: Encontremos las parejas de dígitos que multiplicados dan como resultado 18: 2×9 y 3×6.

a1) Caso 29: No hay una pareja de dígitos que multiplicados dé 29.

a2) Caso 36: Las parejas de dígitos que multiplicados dan como resulta 36 son 4×9 y 6×6.

a2.1) Caso 49: Hay una pareja que cumple: 7×7

a2.1.1) Caso 77: No hay ninguna pareja.

a2.2) Caso 66: No hay ninguna pareja.

a2.3) Caso 94: No hay ninguna pareja.

a3) Caso 63: Hay una pareja: 7×9.

a3.1) Caso 79: No hay ninguna pareja.

a3.2) Caso 97: No hay ninguna pareja.

a4) Caso 92: No hay ninguna pareja

b) Caso 24: Existen las siguientes parejas $3 \times 8, 4 \times 6$

b1) Caso 38: No hay ninguna pareja.

b2) Caso 46: No hay ninguna pareja.

b3) Caso 64: Hay una pareja 8×8.

b3.1) Caso 88: No hay ninguna pareja.

b4) Caso 83: No hay ninguna pareja.

c) Caso 42: Existe una pareja 6×7

c1) Caso 67: No hay ninguna pareja.

c2) Caso 76: No hay ninguna pareja.

d) Caso 81: Hay una pareja 9×9

d1) Caso 99: No hay ninguna pareja.

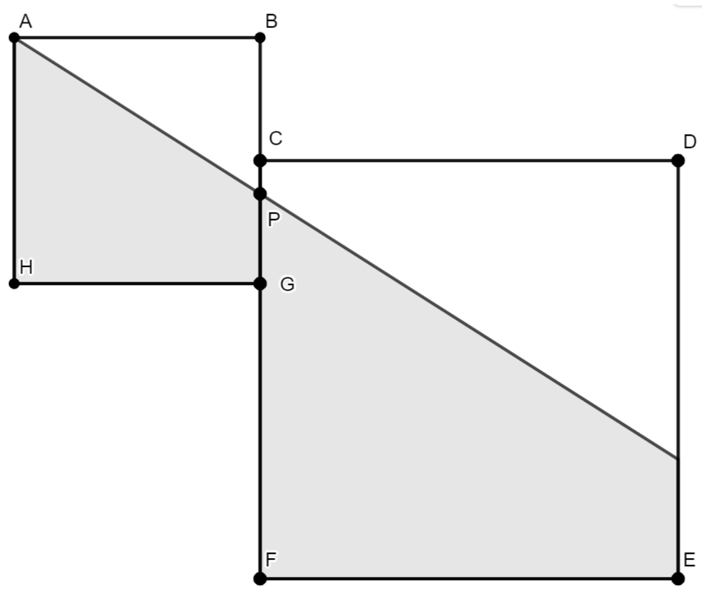
Cada uno de los casos tiene un número al que se le asignará el número 8. En total hay $\mathbf{22}$ números a los que se les asignará el número 8. Los números son $18, 24, 29, 36, 38, 42, 46, 49, 63, 64, 66, 67, 76, 77, 79, 81, 83, 88, 92, 94, 97, 99$.

10. Si Logan escribió todos los números enteros del 1 al 1000, ¿cuántas veces escribió Logan el dígito 8?

Solución:

Si el 8 aparece en el dígito de las centenas, hay 10 posibilidades para el dígito de las decenas y 10 posibilidades para el dígito de las unidades. En total, Logan escribió $10 \times 10 = 100$ veces el dígito 8 en el lugar de las centenas.
Si el 8 aparece en el dígito de las decenas, hay 10 posibilidades para el dígito de las centenas y 10 posibilidades para el dígito de las unidades. En total, Logan escribió $10 \times 10 = 100$ veces el dígito 8 en el lugar de las decenas.
Si el 8 aparece en el dígito de las unidades, hay 10 posibilidades para el dígito de las centenas y 10 posibilidades para el dígito de las decenas. En total, Logan escribió $10 \times 10 = 100$ veces el dígito 8 en el lugar de las unidades.
En total, Logan escribió $100 + 100 + 100 = \mathbf{300}$ veces el dígito 8.

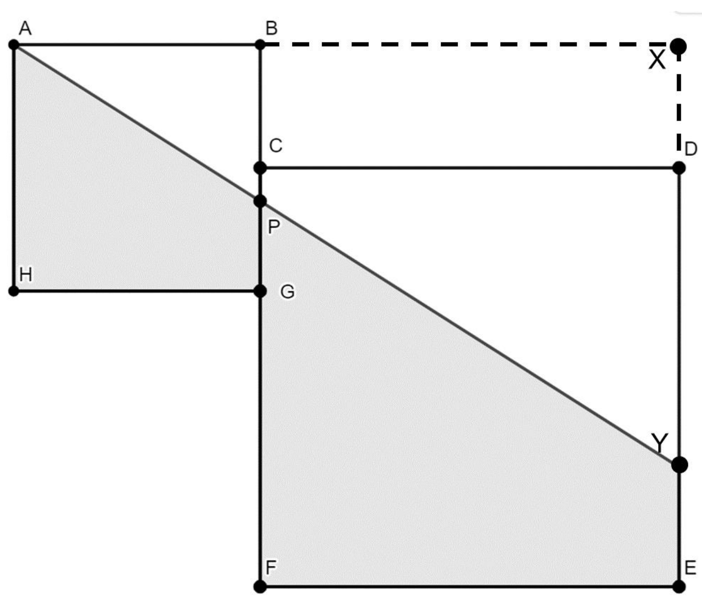
11. En la figura, los cuadrados $ABGH$ y $CDEF$ tienen lados de medida 4 y 6 cm, respectivamente. El punto P pertenece a la recta que contiene los puntos B, C, G y F, siendo C el punto medio del lado BG. La semirrecta AP divide a la figura formada por los dos cuadrados en dos regiones, una blanca y una gris. Si esas dos regiones tienen áreas iguales, ¿cuál es el resultado de multiplicar la medida del segmento PC por 100?



Solución:

La suma de las áreas de los dos cuadrados es $4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52u^2$. El área gris y el área blanca tienen que medir $\frac{52u^2}{2} = 26u^2$.

Extendiendo los segmentos AB y ED hasta el punto X.



El triángulo AXY tiene un área de $\frac{(4+6)*XY}{2} = 5 * XY$. Al área del triángulo AXY es el área blanca, del problema original, más el área del rectángulo $BCDX$, este tiene un área de $2 \times 6 = 12u^2$.

Entonces si queremos que el área blanca mida $26u^2$, entonces

$$5 * XY - 12 = 26 \rightarrow 5 * XY = 38 \rightarrow XY = \frac{38}{5} = 7.6$$

La medida de XY es de 7.6.

Aplicando el teorema de Tales en el triángulo AXY y el triángulo ABP, tenemos que

$$BP = \frac{4 \times 7.6}{10} = \frac{30.4}{10} = 3.04$$

Después $PC = BP - BC = 3.04 - 2 = 1.04$.

El resultado de multiplicar la medida del segmento PC por 100, es $1.04 \times 100 = \mathbf{104}$.

12. En una caja hay 18 cartas. Cada carta tiene un número distinto del 1 al 18. Denisse saca 5 cartas de la caja y acomoda las cartas de menor a mayor, según el número que tienen. Decimos que un acomodo es "Set" si la diferencia entre la segunda y la primera carta es mayor a 1, la diferencia de la tercera y la segunda carta es mayor a 2, la diferencia de la cuarta y la tercera carta es mayor a 3 y la diferencia de la quinta y la cuarta carta es mayor a 4. ¿Cuántos acomodos "Set" distintos Denisse puede formar?

Solución:

Veamos el acomodo "Set" en el que las cartas tienen el menor número posible. La primera carta tendrá el número 1, la segunda carta tendrá el número 3 (ya que la diferencia tiene que ser mayor a 1, la carta más pequeña debe tener una diferencia de 2), la tercera carta tendrá el número 6 (con una diferencia de 3), la cuarta carta tendrá el número 10 (con una diferencia de 4) y la quinta carta tendrá el número 15 (con una diferencia de 5).
Todos los acomodos Sets cumplirán que su primera carta es mayor o igual a 1, su segunda carta es mayor o igual a 3, su tercera carta es mayor o igual a 6, su cuarta carta es mayor o igual a 10 y su quinta carta es mayor o igual a 15.

Transformemos el problema. Supongamos que tenemos 6 cajas numeradas del 1 al 6. Y tenemos 3 pelotas. Cada pelota tiene que ir dentro de una caja, en cada caja puede haber entre 0 y 3 pelotas.
Si hay una pelota en la caja 2, eso significa que haremos que sumaremos 1 a la carta $2, 3, 4$ y 5. Si hay dos pelotas en la caja 3, sumaremos 2 a la carta $3, 4$ y 5. Es decir, si hay x pelotas en la caja z, a las cartas entre z y 5 les sumaremos x. Si una pelota está en la caja 6, esa pelota no le sumará nada a ninguna carta.
Al decir que se le sumará a una carta, nos referimos al caso menor $(1,3,6,10,15)$.
Por ejemplo, si hay una pelota en la caja 2, otra en la caja 4 y otra en la caja 6, el acomodo Set será $(1,3+1,6+1,10+1+1,15+1+1) = (1,4,7,12,17)$.

Solución 1:

Hay varios casos para acomodar las pelotas:

a) Una caja tiene 3 pelotas. Hay que escoger cuál de las cajas tendrá las pelotas. Como hay 6 cajas, hay 6 formas distintas de escogerla.
b) Una caja tiene 2 pelotas y otra 1 pelota. Escogiendo la caja que tendrá 2 pelotas, hay 6 formas distintas de escogerla. Para escoger la caja que tendrá 1 pelota, hay 5 formas (ya que una de las cajas ya tiene 2 pelotas). En este caso hay $6 \times 5 = 30$ formas distintas de acomodar las pelotas.
c) Tres cajas tienen 1 pelota. Hay que escoger las tres cajas que tendrán 1 pelota. Hay 6 formas de escoger la primera caja, 5 de escoger la segunda y 4 de escoger la tercer. Podría pasar que escojamos las cajas (x, y, z) y en otro acomodo (y, z, x), estas formas de escoger las cajas son la misma, ya que las mismas cajas tendrán una pelota. Para quitar estas repeticiones hay que dividir entre 3×2. En este caso hay $\frac{6\times5\times4}{3\times2} = 5 \times 4 = 20$ formas distintas de acomodar las pelotas.

En total hay $6 + 30 + 20 = 56$ formas de acomodar las pelotas, es decir, hay 56 formas de formar acomodos Sets.

Solución 2:

Cada pelota será un punto, cada borde de una caja será un palito. Las cajas están pegadas unas con otras, de forma que tendremos 7 palitos: (| | | | | | |). Quitando los que están en los extremos, tendremos 5 palitos (| | | | |).

Formaremos todas las combinaciones que se pueden formar entre 3 puntos y 5 palitos. Por ejemplo, (| · | | · || ·).

- Los puntos que estén antes del primer palito, corresponden a la caja 1.
- Los puntos que estén entre el primer y segundo palito, corresponden a la caja 2.
- Los puntos que estén entre el segundo y tercer palito, corresponden a la caja 3.
- Los puntos que estén entre el tercer y cuarto palito, corresponden a la caja 4.
- Los puntos que estén entre el cuarto y quinto palito, corresponden a la caja 5.
- Los puntos que estén después del quinto palito, corresponden a la caja 6.

De esta forma podemos contar más rápido las distintas formas de formar acomodos Sets.

Hay que contar cuántos distintos acomodos de 5 palitos y 3 puntos hay. Siempre tendremos una "palabra" formada de 8 caracteres, los 5 palitos y 3 puntos en algún orden. Basta con seleccionar 3 de los 8 caracteres para que sean puntos, el resto serán palitos.

Hay $\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 8 \times 7 = 56$ formas distintas de seleccionar los puntos y palitos, de acomodar las pelotas en las cajas y de formar acomodos Sets.

Denisse puede formar $\mathbf{56}$ acomodos "Set" distintos.