

1. En el campo, el tlacuache miente el 1°, 2° y 3° día de la semana; mientras que el ocelote miente el 4°, 5° y 6° día de la semana. En los días que no mienten, dicen la verdad. Un día se encontraron el tlacuache y el ocelote, sostuvieron este diálogo:
 Tlacuache: ¡Hola Ocelote! Ayer mentí,
 Ocelote: ¡Hola Tlacuache! Ayer también mentí.
 ¿En qué día sucedió esta conversación?

Solución:

Hay dos posibilidades cuando alguno dice que mintió ayer:

- Está diciendo la verdad. Ese día no estaba mintiendo, pero el anterior sí.
- Está mintiendo. Ese día estaba mintiendo, así que el anterior dijo la verdad.

Para que los dos estén mintiendo, deberían poder mentir un mismo día, pero eso no es posible.

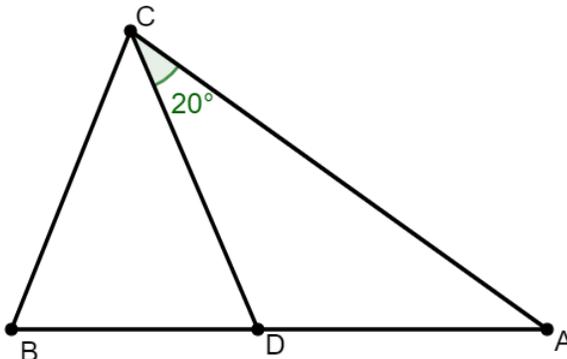
Para que los dos estén diciendo la verdad, sólo podría ser el 7° día, pero el tlacuache dijo la verdad el 6° día, así que no es posible.

El tlacuache pudo haber dicho esa frase el 1° o 4° día.

El ocelote pudo haber dicho esa frase el 4° o 7° día.

El único día en que pudo haber sucedido esa conversación fue el 4° día.

2. En el triángulo ABC , la suma del ángulo A y del ángulo B es de 100° . D es un punto sobre el segmento AB tal que $CD = CB$ y el ángulo $DCA = 20^\circ$. ¿Cuánto mide el ángulo en A ?



Solución:

Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° y la suma de los ángulos de A y B es 100° , entonces $\angle BCA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, entonces $\angle BCD = \angle BCA - \angle DCA = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

Como $CD = CB$, entonces el triángulo CBD es isósceles. Los triángulos isósceles tienen dos ángulos con la misma medida, así que $\angle DBC = \angle CDB$. Sumando los ángulos interiores del triángulo CBD , $\angle BCD + \angle DBC + \angle CDB = 180^\circ \rightarrow \angle BCD + 2\angle CDB = 180^\circ \rightarrow 60^\circ + 2\angle CDB = 180^\circ \rightarrow \angle CDB = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

El ángulo $\angle ADB$ es llano, así que mide 180° . $\angle CDB + \angle ADC = \angle ADB \rightarrow \angle ADC = \angle ADB - \angle CDB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Sumando los ángulos internos del triángulo CDA , $\angle DCA + \angle ADC + \angle A = 180^\circ \rightarrow 20^\circ + 120^\circ + \angle A = 180^\circ \rightarrow \angle A = 180^\circ - 20^\circ - 120^\circ = 40^\circ$

El ángulo en A mide 40° .

3. Ale va a guardar en cajas sus plumas, 10 en cada una. Si tiene 206 plumas de un color y 23 de otro, ¿cuántas cajas necesita al menos para guardarlas, si no quiere juntar plumas de distinto color en la misma caja?

Solución:

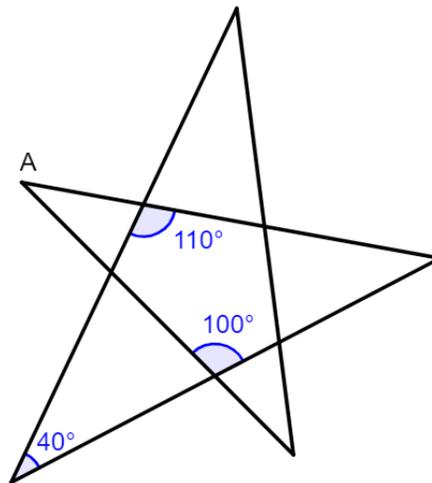
Como no vamos a juntar plumas del mismo color en la misma caja, vamos a guardar separadamente las plumas de distinto color. Necesitamos al menos 21 cajas para guardar las plumas del primer color (20 cajas llenas y una con 6 plumas) y al menos 3 cajas para guardar las plumas del otro color (2 cajas llenas y otra con 3 plumas). Así, Ale requiere al **menos 24 cajas**.

4. ¿Por cuál número se debe de sustituir " a " en $202337554332110a2$ para que sea divisible entre 12?

Solución:

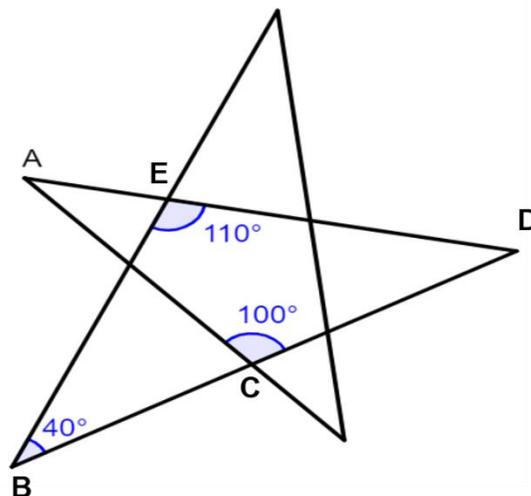
Un número es divisible entre 12 si es divisible entre 3 y 4. Como 4 divide a 100, basta con que $a2$ sea divisible entre 4 para que el número entero sea divisible entre 4. Esto significa que a tiene que ser 1, 3, 5, 7 o 9 para que el número entero sea divisible entre 4. Un número es divisible entre 3 si y solamente si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Como la suma de los dígitos que no son a es 43, a tendría que ser 2, 5 u 8 para que el número entero sea múltiplo de 3. Como $a=5$ es el único caso en que el número es divisible entre 3 y entre 4, y por ende entre 12, sustituimos a con **5**.

5. ¿Cuál es la medida del ángulo A ?



Solución:

Nombrando algunos de los vértices



Viendo el triángulo BED , la suma de sus ángulos internos es $\angle B + \angle BED + \angle D = 180^\circ \rightarrow 40^\circ + 110^\circ + \angle D = 180^\circ \rightarrow \angle D = 180^\circ - 40^\circ - 110^\circ = 30^\circ$.

Viendo el triángulo ACD , la suma de sus ángulos internos es $\angle D + \angle DCA + \angle A = 180^\circ \rightarrow 30^\circ + 100^\circ + \angle A = 180^\circ \rightarrow \angle A = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ$

6. Emiliano tiene 2023 cartas de Yu-Gi-Oh, numeró todas de una en una empezando por el 1. Las cartas que tenían un número que terminaba con 0, las tiró. Después volvió a numerar las cartas que le quedaban y otra vez tiró las que terminaban en 0. Al final, ¿cuántas cartas le quedaron?

Solución:

Emiliano se deshace de las cartas correspondientes a las decenas (10, 20, 30...2020), que son 202, 1 por cada 10 cartas (2023 dividido entre 10 da 202 y sobran 3). Así, se queda con 1821 cartas. Al repetir el proceso, nos deshacemos de 182 cartas, quedando Emiliano al final con "solamente" **1639 cartas**.

7. Una pequeña vaca se come todas las hojas de un árbol en 42 horas. Su papá y mamá comen el triple de rápido, cada uno. ¿Cuántas horas tardarán los tres en comerse todas las hojas de un mismo árbol?

Solución:

Digamos que un árbol tiene 420 hojas.

Entonces la pequeña vaca come 10 hojas por hora y su papá y mamá comen 30 hojas por hora cada uno. Si los tres comen de un mismo árbol, comerán $10 + 30 + 30 = 70$ hojas por hora.

Así que comiendo de un mismo árbol, los tres tardarán $\frac{420}{70} = 6$ horas.

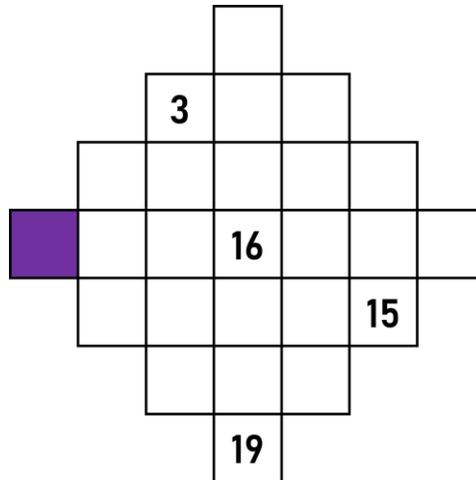
De la misma forma, si un árbol tiene x hojas.

La pequeña vaca comerá $\frac{x}{42}$ hojas por hora y sus padres comerán $\frac{3x}{42} = \frac{x}{14}$ hojas por hora.

Los tres juntos comerán $\frac{x}{42} + \frac{x}{14} + \frac{x}{14} = \frac{x}{42} + \frac{x}{7} = \frac{x}{42} + \frac{6x}{42} = \frac{7x}{42} = \frac{x}{6}$ hojas por hora.

Comiendo de un mismo árbol, los tres tardarán $\frac{x}{\frac{x}{6}} = \frac{6x}{x} = 6$ horas.

8. Sebastián tiene que poner números enteros en los cuadritos de la siguiente imagen, de tal manera que por cada 3 cuadritos consecutivos en la misma fila o columna el número que se encuentre en medio, sea el promedio de los otros dos. Dada la siguiente imagen, ¿qué número deberá de escribir en el cuadrado sombreado?



Solución:

Si tenemos 2 números a y $a + b$.

| | | | | | | | | | |
|--|--|--|-----|---------|-----|--|--|--|--|
| | | | a | $a + b$ | x | | | | |
|--|--|--|-----|---------|-----|--|--|--|--|

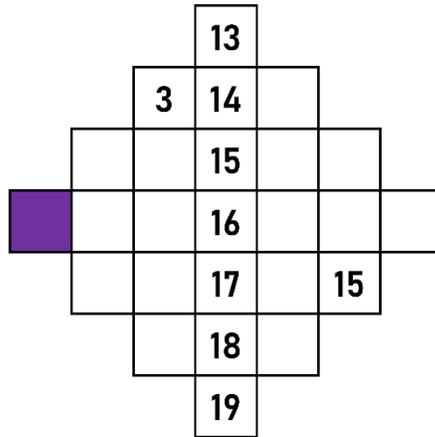
El número a la derecha de b tendrá que ser $\frac{a+x}{2} = a + b \rightarrow a + x = 2a + 2b \rightarrow x = a + 2b$.

Siguiendo el mismo proceso podemos llenar la fila

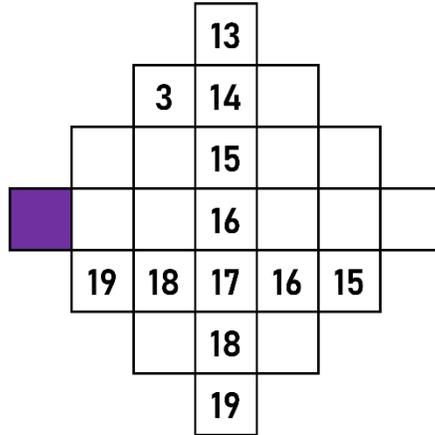
| | | | | | | | | | |
|----------|----------|---------|-----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $a - 3b$ | $a - 2b$ | $a - b$ | a | $a + b$ | $a + 2b$ | $a + 3b$ | $a + 4b$ | $a + 5b$ | $a + 6b$ |
|----------|----------|---------|-----|---------|----------|----------|----------|----------|----------|

Así que en cada fila y columna los números seguirán una progresión aritmética.

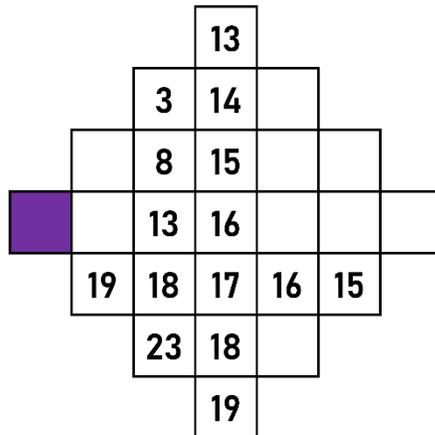
Viendo la columna de en medio, si $a = 16$, entonces $a + 3b = 19$. Así que $a + 3b - a = 3b = 19 - 16 = 3 \rightarrow b = 1$. La progresión va de 1 en 1.
La imagen quedaría:



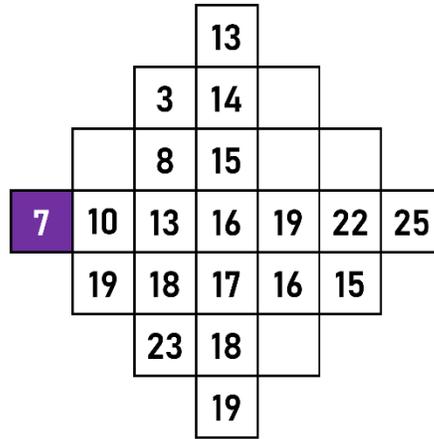
Repitiendo el proceso con la antepenúltima fila, $a = 17$, $a + 2b = 15$. $a + 2b - a = 2b = 15 - 17 = -2 \rightarrow b = -1$. La imagen quedaría:



Viendo la tercera columna $a = 3$, $a + 3b = 18$, entonces $a + 3b - a = 3b = 18 - 3 = 15 \rightarrow b = 5$.



Viendo la fila de en medio, $a = 13$, $a + b = 16$, entonces $a + b - a = b = 16 - 13 = 3$.



El número que estará en la cuadrícula sombreada será el 7.

9. Josué fue de visita al planeta Arrakis y descubrió que ahí las semanas tienen 13 días. Si llegó el primer día de la semana y se fue el día 2023, ¿en qué día de la semana se fue?

Solución:

Coloquemos algunos días en una tabla:

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 |

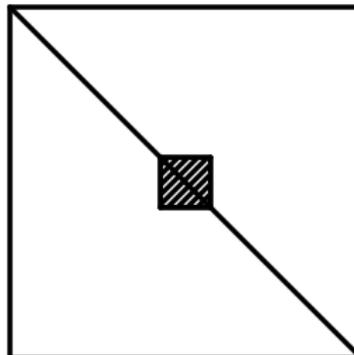
Podemos ver que los últimos días de la semana siempre serán múltiplos de 13.

Como queremos saber el día 2023, primero veremos el último día de la semana que se acerque más a 2023. $\frac{2023}{13} \approx 155.61$, así que el día $155 \times 13 = 2015$ será el último día de la semana. Siguiendo la tabla

| | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2011 | 2013 | 2014 | 2015 |
| 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | | | | | |

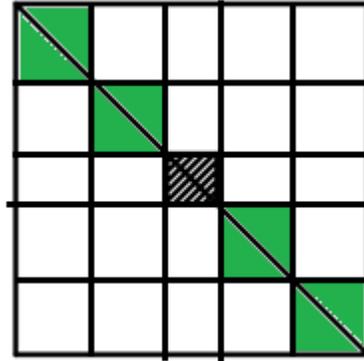
Así que el día 2023 será el **8° día de la semana**.

10. En la figura, el área del cuadrado más grande es igual a 8400 m^2 . Una de sus diagonales se divide en cinco segmentos de la misma longitud. El segmento de en medio es la diagonal del cuadrado más pequeño que está sombreado. ¿Cuál es el área del cuadrado sombreado?



Solución:

Podemos trazar cuadrados cuyas diagonales sean el resto de los segmentos. Como sus diagonales son paralelas (la misma recta, de hecho) y tienen la misma medida, sus lados son paralelos e iguales, y tienen la misma área. Como hay pares de lados paralelos que tienen puntos en común (los vértices), estos pertenecen a la misma recta, que prolongamos para obtener una cuadrícula como la siguiente (pero bien hecha), donde es fácil ver que cada uno de los 25 cuadrillos que se forman tienen la misma área. Así, el área del cuadrado sombreado es $1/25$ de los 8400 m^2 del cuadrado más grande, es decir 336 m^2 .



11. Todos los números pares desde el 2 hasta el 98, incluyendo ambos y quitando todos los que acaban en 0, se multiplican entre sí. ¿Cuál será el dígito de las unidades de la multiplicación?

Solución:

Al multiplicar dos números a y b , si sólo nos interesan las unidades del resultado, podemos utilizar únicamente los dígitos de las unidades de a y b , ya que los otros dígitos no afectarán en nada a las unidades.

Multiplicando los números pares desde el 2 hasta el 98, podemos fijarnos únicamente en las unidades, así que sería algo como $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^{10} \times 4^{10} \times 6^{10} \times 8^{10} = (2 \times 4 \times 6 \times 8)^{10} = 384^{10}$. De nuevo, como sólo nos interesan las unidades, sólo utilizamos el último dígito de 384, es decir, necesitamos saber el último dígito de 4^{10} .

| | |
|---------------------------|--|
| 4^1 | 4 |
| 4^2 | $4 \times 4 = 16$ sólo nos interesa el 6 |
| $4^4 = 4^2 \times 4^2$ | $6 \times 6 = 36$ nos interesa el 6 |
| $4^8 = 4^4 \times 4^4$ | $6 \times 6 = 36$ nos interesa el 6 |
| $4^{10} = 4^8 \times 4^2$ | $6 \times 6 = 36$ nos interesa el 6 |

El dígito de las unidades será el 6.

12. ¿Cuántos números diferentes se pueden representar como el resultado de una suma utilizando únicamente los números 1, 2, 3, 7, 14, 28, si no puedes utilizar el mismo número más de una vez en la misma suma?

Por ejemplo el 18 se puede representar como $1 + 3 + 14 = 18$ y el 6 como $1 + 2 + 3 = 6$.

Las sumas con un solo sumando están permitidas, un ejemplo sería el 2.

Solución:

Para formar todas las sumas, hay dos opciones para cada número:

- Se suma
- No se suma

Por ejemplo, el 1 se puede sumar o no, el 2 se puede sumar o no, etc.

Como tenemos seis números hay $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ opciones. Pero al hacer esto estaríamos considerando la opción cuando no se utilizó ningún número, así que hay 63 opciones.

Ahora, nos piden números distintos y estamos contando algunos números 2 veces, por ejemplo el $3 = 3 = 1 + 2$ o el $10 = 1 + 2 + 7 = 3 + 7$. Todos los números que se repiten son los que contienen al 3, pero no contienen al 1 ni al 2.

Esos números son todos los que se pueden formar utilizando los números 7, 14, 28 y sumarle 3. La cantidad de opciones con estos números serán $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$. Así que hay 8 números repetidos.

Se pueden obtener $63 - 8 = 55$ **números distintos**.