## Soluciones del segundo examen eliminatorio

OMMAGS 2022

**1.** Cada día el conejo Rogelio come 3 zanahorias o 6 plátanos. La semana pasada comió 24 plátanos. ¿Cuántas zanahorias comió?

**Solución:**

Como comió 24 plátanos, estos los comió durante $\frac{24}{6} = 4$ días. Por lo que el resto de días, comió zanahorias. Por lo tanto, comió $(7-4) \times 3 = 3 \times 3 = \mathbf{9}$ zanahorías.

**2.** Andrea, Betito, Carlos y Dulce están sentados en una fila de cuatro asientos numerados del #1 al #4. Toño los ve **y** dice:

**"Betito está sentado a un lado de Carlos"**

**"Andrea está entre Betito y Carlos".**

Sin embargo, cada uno de los enunciados de Toño son falsos. En realidad, Betito está sentado en el asiento #3. ¿En qué número de asiento está Dulce? Si no hay suficiente información para resolver el problema, responde con un 0.

**Solución:**

Sabemos que Betito está en el asiento #3. Puesto que lo que dijo Toño es falso, por el primer enunciado sabemos que Betito no está a un lado de Carlos, por lo que Carlos está en el asiento #1. Por el segundo enunciado sabemos que Andrea no está entre Betito y Carlos, por lo que tiene que estar en el Asiento #4. De esta manera, Dulce está en el asiento #**2**.

**3.** Al final de su gran fiesta de cumpleaños, Stephanie se dio cuenta de que recibió 36 peluches de vacas por parte de sus primos. Por desgracia, no recuerda cuántos primos tiene, pero recuerda que cada uno le dio una distinta cantidad de vacas, ¿cuál es la mayor cantidad de primos que puede tener Stephanie? (ningún primo se perdió la fiesta)

**Solución:**

Para obtener la mayor cantidad de primos, podemos suponer que cada uno le regalo la menor cantidad posible de peluches, podemos hacer la tabla sumando 1, 2, 3, etc.

| Cantidad de primos | Total de peluches |
|---|---|
| **1** | 1 |
| **2** | 3 |
| **3** | 6 |
| **4** | 10 |
| **5** | 15 |
| **6** | 21 |
| **7** | 28 |
| **8** | 36 |

Así que Stephanie máximo puede tener **8 primos**.
Si consideramos que un primo podría no haber dado nada, también sería posible que tuviera **9 primos**.

**4.** En una mesa hay dos montones de hojas, el de la izquierda con 16 y el de la derecha con 20. Para recogerlas, Mixtli sigue siempre una de las siguientes reglas:

- Tomar 3 hojas de la pila de la izquierda.
- Tomar 2 hojas de la pila de la derecha.
- Tomar 1 hoja de cada pila

El tallerista está presionando a Mixtli para que recoja sus hojas, ¿cuál es la menor cantidad de movimientos que debe realizar Mixtli para recoger todas las hojas de la mesa?

**Solución:**

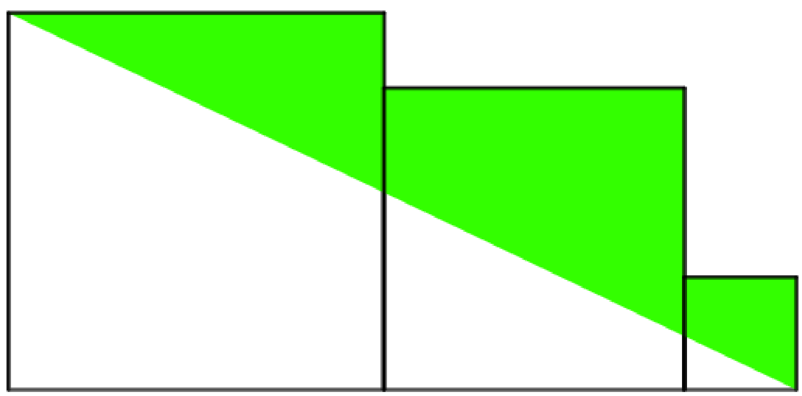
Para recoger todas las hojas usando la menor cantidad de movimientos, es mejor recoger la mayor cantidad de hojas en un solo movimiento, por lo que es mejor usar la primera regla la mayor cantidad de veces posible. Se podría usar 5 veces y dejar el montón de la izquierda con 1 hoja. Para recoger esa hoja, se debería de usar la tercera regla, dejando el montón de la derecha con 19 hojas. La única forma posible para recoger esas 19 hojas sería usando la regla 2, pero al usarla 9 veces, sobraría una hoja que no se podría recoger. Así que, máximo se puede usar la primera regla <u>4 veces</u>, dejando el montón de la izquierda con 4 hojas.

Para recoger esas 4 hojas, sería necesario usar <u>4 veces</u> la tercera regla, dejando el montón de la derecha con 16 hojas.

Para recoger las 16 hojas, se debería de usar la segunda regla <u>8 veces</u>, dejando así, ambos montones sin hojas.

Así que la menor cantidad de movimientos que debe de realizar Mixtli para recoger todas las hojas es $4 + 4 + 8 = \mathbf{16}$ movimientos.

**5.** Tres cuadrados con lados de longitudes: 20 cm, 16 cm y 6 cm, respectivamente se colocan uno al lado del otro como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuál es el área de la parte sombreada?

**Solución:**

Una forma de encontrar el área sombreada es sumando las áreas de los cuadrados, y restando el área no sombreada. Las áreas de los cuadrados son $400\ cm^2$, $256\ cm^2$ y $36\ cm^2$ respectivamente. El área no sombreada se puede calcular fácilmente, ya que es un triángulo de base $20 + 16 + 6 = 42$ y altura $20$. El área no sombreada es $\frac{42*20}{2} = 420\ cm^2$. Entonces, el área de la parte sombreada es $400 + 256 + 36 - 420 = \mathbf{272}\ cm^2$.

**6.** ¿Cuántos números diferentes podemos obtener al sumar dos números distintos del conjunto {1, 2, 3, …, 2022}? (los tres puntos representan a todos los números que se encuentran entre 3 y 2022)

**Solución:**

El menor número que podemos obtener sumando dos números del conjunto, sería el resultado de sumar $1 + 2 = 3$. Mientras que el mayor número es el resultado de la suma $2021 + 2022 = 4043$.

Podemos ver que todos los números entre 3 y 4043 se pueden obtener sumando dos números del conjunto. Del 3 al 2023 se pueden obtener sumando 1 más 2,3, …, 2022. Del 2024 al 4043 se pueden obtener 2022 más 2, 3, …, 2021.

Así que se pueden obtener $4043 - 3 + 1 = \mathbf{4041}$ números distintos.

**7.** Caperucita roja les lleva guayabas a sus 4 tías. Antes de entrar a la casa de cada una de sus tías, el Lobo se come la mitad de las guayabas que hay en ese momento en la canasta. Cuando sale de la casa de su cuarta tía, ya no le quedan guayabas. Si entregó la misma cantidad de guayabas a cada tía y una canasta máximo puede llevar 100 guayabas, ¿cuál es la mayor cantidad de guayabas que se pudo comer el Lobo?

**Solución:**

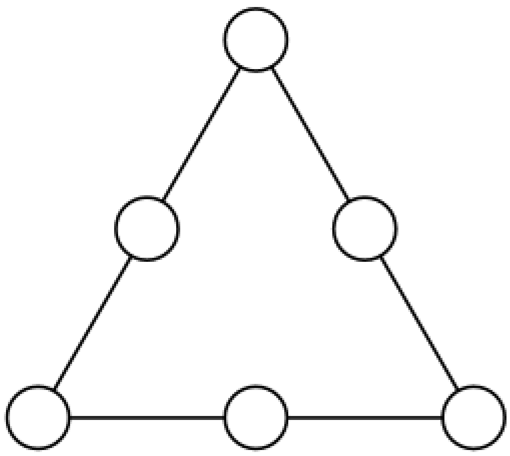
La cantidad de guayabas que tiene caperucita antes de ver al Lobo, después de ver al Lobo y después de ver a una de sus tías, es diferente dependiendo de con qué tía vaya. Si a cada tía le dio $x$ guayabas, antes de ver a una tía, tenía $x$ guayabas más y antes de ver al Lobo tenía el doble. Así se puede construir la siguiente tabla viendo el tiempo de manera inversa:

| | Tía 4 | Tía 3 | Tía 2 | Tía 1 |
|---|---|---|---|---|
| **Después de ver a su tía** | $0$ guayabas | $2x$ guayabas | $6x$ guayabas | $14x$ guayabas |
| **Después de ver al Lobo** | $x$ guayabas | $3x$ guayabas | $7x$ guayabas | $15x$ guayabas |
| **Antes de ver al Lobo** | $2x$ guayabas | $6x$ guayabas | $14x$ guayabas | $30x$ guayabas |

Así que cuando empezó el recorrido, caperucita tenía $30x$ guayabas. La mayor cantidad de guayabas que le pudo haber dado a su tía fueron 3, ya que $30 \times 4 = 120$ y $30 \times 3 = 90$.

Así que caperucita le dio $3 \times 4 = 12$ guaybas a sus tías y el Lobo se comió en total $90 - 12 = \mathbf{78}$ guayabas.

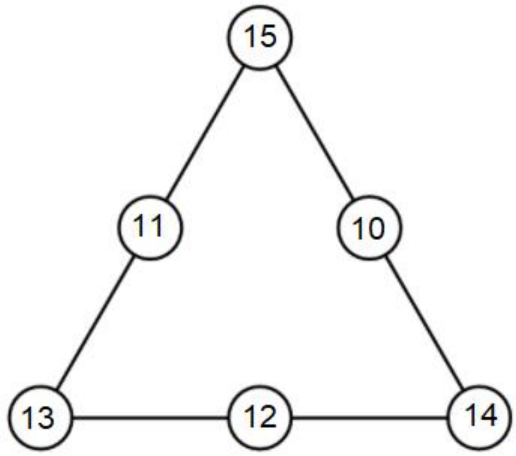
**8.** En un triángulo mágico, cada número entero del 10 al 15 se coloca en cada círculo (sin repetir) de manera que la suma S de los tres círculos en cada lado sea la misma. ¿Cuál es el valor más grande posible de S?



**Solución:**

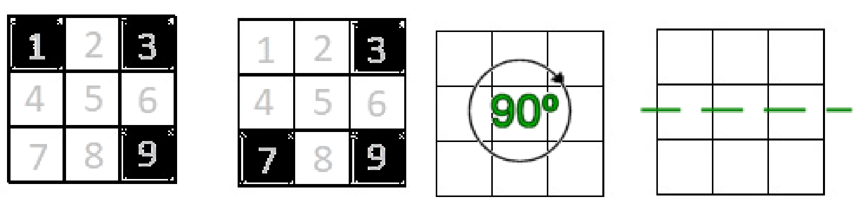
Queremos que la suma de los tres círculos de cada lado sea $S$. Notemos que si maximizamos $3S$ es lo mismo que maximizar $S$. Si sumamos los círculos de los tres lados del triángulo ($3S$), tenemos que los círculos de las esquinas se repiten dos veces, pues forman parte de dos lados distintos del triángulo. Entonces, si queremos maximizar la suma, hay que colocar en las esquinas los tres valores mayores, que son $15, 14$ y $13$. De esta forma, los valores $12, 11$ y $10$ quedan en las aristas, y la suma de los tres lados del triángulo sería $3S = 2 \times (15 + 14 + 13) + 12 + 11 + 10 = 117$. Entonces, $S = \frac{117}{3} = \mathbf{39}$.

Ahora, hay que ver si un acomodo como el descrito es posible. Sin mucho esfuerzo, podemos construir el siguiente arreglo:




**9.** En una cuadrícula de 3 × 3 cuadros blancos, se quieren pintar tres cuadros negros sin que se toquen entre ellos, sea por algún lado a algún vértice. ¿De cuántas formas distintas pueden pintarse sin que el resultado entre ellas coincida mediante una rotación o una reflexión?

Por ejemplo, **estas dos formas son la misma** porque se puede rotar una para llegar a otra o reflejar una y llegar a la otra. Son la misma forma porque si la primera figura la giras 90º en el sentido de las manecillas del reloj, el 1, va al 3, el 3 va al 9 y el 9 va al 7. Pasa lo mismo si la reflejas, como espejo, sobre la línea horizontal que pasa por el centro: el 1, va al 7, el 3 va al 9 y el 9 va al 3.




**Solución:**

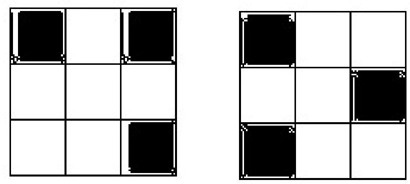
Si se pinta el cuadro 5, no se podrá pintar ninguno de los demás cuadros. Así que en ningún caso, el cuadrado 5 se podrá pintar.

Si se pinta un cuadrado que no esté en una esquina, ni en el centro, por ejemplo el cuadro 4. No se podrá pintar el cuadrado 1, 2, 5, 7, ni 8. Así que sólo quedarán los cuadrados 3, 6 y 9, de los cuales se deben de pintar 2, así que la única forma en la que se pueden pintar es pintando el 3 y 9. Si se pinta inicialmente el 2, 6 u 8, resultará la misma configuración después de girarla

90°, 180° y 270°. Así que sólo se puede de una forma si se pinta un cuadrado que no sea una esquina.

Si sólo se pintaran esquinas, resultarán como el caso de ejemplo en el que se pueden obtener girando 90° o reflejando. Así que sólo será una forma.

En total sólo se puede pintar de **2** formas.



**10.** Si se escriben todos los múltiplos de 5 menores que 2022, ¿cuántos 1s se usan?

**Solución:**

Todos los números que son múltiplos de 5, en la cifra de las unidades, siempre habrá un $0$ o un $5$. Así que los $1s$ sólo se usaran en el resto de cifras. Para hacer el problema más fácil, podemos ignorar la cifra de las unidades y al final multiplicar por 2 el resultado, ya que en las unidades puede aparecer un 0 o un 5.

Si aparece un $1$ en la cifra de las unidades de millar, será para los números de $100$ a $199$, así que se usará $\underline{199 - 100 + 1 = 100 \text{ veces}}$.

Si aparece un 1 en las centenas, será para los números de $10$ a $19$. Se usará $19 - 10 + 1 = 10$ veces. Como se puede poner un 0 o un 1 en las cifras de unidades de millar, entonces se usará $\underline{2 \times 10 = 20 \text{ veces}}$. No se puede usar un 2 en las unidades de millar, el menor número posible sería $2100$ que es mayor a $2022$.

Si aparece un 1 en las decenas, en las centenas y unidades de millar pueden aparecer de $00$ a $20$, así que se usará $\underline{20 - 0 + 1 = 21 \text{ veces}}$.

En total se usarían $2 \times (100 + 20 + 21) = 2 \times 142 = \mathbf{282}$ unos.

**11.** El alien Monev quiere escoger dos días de la semana para hacer problemas de matemáticas. Si Monev no quiere resolver problemas dos días seguidos y en su planeta las semanas tienen 11 días, ¿de cuántas maneras puede escoger los dos días?

**Solución;**

Si Monev escoge sólo un día, podrá escoger entre los 11 días. Para escoger el segundo día, Monev no podrá escoger el mismo día, un día antes, ni un día después, así que tendrá $11 - 3 = 8$ días para escoger.

Suponiendo que Monev primero selecciona el día 3 y después selecciona el día 1. Esa forma será la misma que si selecciona el día 1 primero y después el día 3. Así que el total se tiene que dividir entre 2 para quitar repeticiones.

En total, Monev puede escoger los dos días de $\frac{11\times 8}{2} = \mathbf{44}$ maneras.

**12.** Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 36 y que tengan exactamente 3 divisores.

**Solución:**

Buscando algunos números con 3 divisores, se pueden obtener el 4 y el 25. El 4 tiene como divisores, el 1, el 2 y el 4. Mientras que el 25 tiene al 1, 5 y 25. Se puede ver que cada número es un primo elevado al cuadrado.

Si tenemos un primo $p$ y lo elevamos al cuadrado, sus únicos divisores serán el $1$, $p$ y $p^2$. Si no se usara un primo, digamos que usamos un número compuesto $n = p_1 p_2$, sus divisores serán $1, p_1, p_2, p_1 p_2$ así que tiene más de 3 divisores.

Entonces los únicos números menores que 36 con tres divisores son, $2^2, 3^2$ y $5^2$. El producto de esos números es $2^2 \times 3^2 \times 5^2 = 4 \times 9 \times 25 = 100 \times 9 = \mathbf{900}$.