Soluciones del primer examen eliminatorio

OMMAGS 2022

1. A Sophie le gusta conocer las características que tienen los números de dos cifras. Una duda que tiene Sophie con los números de dos cifras es acerca de la cantidad de estos números que son divisibles entre 3 y entre 5. ¿Puedes ayudar a Sophie indicando la cantidad de números de dos cifras que son divisibles entre 3 y entre 5?

Solución:

Todos los números desde el 10 hasta el 99 están conformados por dos cifras, los números menores que 10 tienen solo una cifra, y los números mayores a 99 tienen tres cifras o más. Esto significa que existen en total 90 números de dos cifras.

Que un número sea divisible entre 3 significa que ese número se puede obtener multiplicando 3 por algún otro número entero. Por cada número que es divisible entre 3 existen otros dos números que no lo son, por ejemplo, 12 es igual a 3 x 4, esto significa que 12 es divisible entre 3, sin embargo, los dos números que le siguen, 13 y 14, no son divisibles entre 3.

Así mismo, un numero múltiplo de 5 termina en 5 o 0, esto se debe porque al multiplicar 5 por algún numero par, siempre te dará un número que es múltiplo de 10, como por ejemplo 5x4 = 20. Al multiplicar 5 por algún impar, su terminación será 5 ya que estaríamos sumando 5 a algún múltiplo de 10, por ejemplo, 5x5 = 25 = 20 + 5.

Ahora, vamos a comprobar que los números que buscamos en la solución son los múltiplos de 15. Si algún número es múltiplo de 15, es claro que es uno de los números buscados pues 15 = 3x5 y estaría cumpliéndose que sea múltiplo de 3 y 5. Mientras tanto, si un número no es múltiplo de 15, no puede cumplir que sea múltiplo de 3 y 5 al mismo tiempo.

En resumen, los múltiplos de 15 entre 10 y 99 son: 15, 30, 45, 60, 75 y 90. De donde la cantidad de números buscados son 6.

2. Elías ha dibujado en su libreta un rectángulo y un triángulo que tienen el mismo perímetro. El ancho del rectángulo es el doble del alto del rectángulo y las longitudes de los tres lados del triángulo son 90, 67 y 83. ¿Cuál es el área del rectángulo?

Solución:

Podemos decir que el ancho del rectángulo mide b, el alto mide b y el perímetro de las dos figuras mide p. El problema nos dice que $b = 2 * h$.

Como el perímetro de un triángulo se calcula sumando la medida de todos sus lados, $p = 90 + 67 + 83 = 240$.

El perímetro de un rectángulo se puede calcular multiplicando por dos la suma de su ancho y largo, así que $p = 2(b + h) = 2(2 * h + h) = 2(3 * h) = 6 * h = 240$. Despejando h, tenemos que $h = \frac{240}{6} = 40$ y $b = 2 * h = 2 * 40 = 80$.

El área de un rectángulo se calcula multiplicando su ancho por altura, así que el área del rectángulo es $b * h = 40 * 80 = \mathbf{3200}$.

3. Stephanie gastó 2/7 del dinero que tenía. Si ahorita tiene $65, ¿cuánto dinero tenía originalmente?

Solución:

El problema nos dice que Stephanie tenía una cantidad de dinero x originalmente, gastó $\frac{2}{7}x$ y ahora tiene $65, así que $x - \frac{2}{7}x = 65 \rightarrow \frac{5}{7}x = 65$.

Despejando x, $x = \frac{7}{5} * 65 = 7 * 13 = 91$. Por lo tanto, Stephanie originalmente tenía $**91**.

4. Erik asiste a una feria y al pasar junto a la rueda de la fortuna se da cuenta en cierto momento que la canastilla 16 alcanza la posición más alta cuando la canastilla 7 alcanza la posición más baja. Erik también se da cuenta que las canastillas están numeradas 1, 2, 3… en orden y todas están separadas a la misma distancia. ¿Cuántas canastillas tiene la rueda de la fortuna?

Solución:

Entre la canastilla 7 y la 16 hay 16-7-1=8 canastillas ({8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}, en el sentido de la numeración), sumamos cualquiera de las otras dos y tenemos que 9 es la mitad de las canastillas. Multiplicamos 9*2=**18 canastillas** en total.

5. Mixtli escribe el número de diez cifras 9831527645 en una hoja de papel y le pide a su hermana que corte el papel en tres partes para obtener 3 nuevos números y sumarlos. ¿Cuál es la menor suma de los 3 nuevos números que se puede lograr?

Solución:

Como el número original tiene diez cifras y se tiene que dividir en 3 números, la menor cantidad de cifras que puede tener el número con más cifras es de 4. Es decir, si se trata de obtener 3 números con una cantidad de cifras parecidas, lo más cercano serán dos números de 3 cifras y un número de 4 cifras. Si se usara un número de dos cifras se deberían de obtener en el mejor de los casos dos números de 4 cifras.

El mejor caso es tener un solo número de 4 cifras donde la cifra de las unidades de millar sea más pequeña. La menor cifra en el número original es 1, así que el número de 4 cifras será:

$$1527$$

De esta forma el número original también se partiría en dos números de 3 cifras:

$$983, 645$$

Así que la menor suma será $1527 + 983 + 645 = \mathbf{3155}$.

Si se usaran dos números de 4 cifras, la única forma de obtener un número menor sería sumar en las unidades de millar el 1 y 2, pero al no ser posible, la menor suma es 3155.

6. El planeta Venus es el segundo planeta del sistema solar más cercano al sol y un año dura 225 días. Si el año comienza el primer día de la semana y una semana tiene 7 días {1,2,3,4,5,6,7} (como en la tierra). ¿En qué número del día de la semana se acaba el año?

Solución:

Como el primer día del año cae en el día 1 de la semana y cada semana tiene 7 días, significa que el día $1 + 7 = 8$ también será el día 1 de la semana, de esta forma se puede saber qué días serán el día 1 de la semana.

De la misma forma, el 7 día del año será el día 7 de la semana, aplicando lo anterior los días $14, 21, 28, 35, \dots$ también serán el día 7 de la semana. Todos los días del año que sean múltiplos de 7 caerán en un día 7 de la semana.

Para saber cuál es el último día 7 de la semana en el año se puede realizar la división $\frac{225}{7} \approx 32.142 \dots$, así que el día $32 * 7 = 224$ será el último día 7 de la semana. Así que el año acabará un día después, el día $\mathbf{1}$ de la semana.

7. Ana está a cargo de la organización de un concurso de matemáticas en donde se aplicará un examen con 15 problemas. Para revisar y calificar los exámenes, se requiere que cada problema debe ser revisado por exactamente 2 miembros del jurado y cada miembro califica exactamente 5 problemas. ¿Cuántos miembros del jurado requiere Ana para este concurso?

Solución:

Como son 15 problemas y se necesitan 2 revisiones, se necesitan 15*2=30 revisiones totales. Como cada miembro del jurado puede realizar 5 revisiones, se necesitan 30/5=**6 miembros** revisando como mínimo. Hay varias maneras de asignar los problemas a 6 miembros del jurado de manera que cada problema se revise 2 veces, la más obvia asignar a un par los primeros 5, a otro los últimos 5 y al restante los sobrantes.

8. Ariel y Juan se reparten dos rectángulos iguales y cada uno de ellos recorta su rectángulo a la mitad pero de forma distinta. Ariel obtiene dos rectángulos de 20 cm de perímetro cada uno y Juan obtiene dos rectángulos de 25 cm de perímetro cada uno. ¿Cuál era el perímetro de los rectángulos originales?

Solución:

Para cortar un rectángulo a la mitad de manera que obtengamos dos rectángulos, el corte debe ser paralelo a los lados, siendo la suma del perímetro de los rectángulos resultantes equivalente al perímetro del original más dos veces la longitud de los lados paralelos al corte. Ariel y Juanito hicieron cortes paralelos a distintos lados, por lo que al sumar los perímetros de los rectángulos que obtuvieron (20+25=45) obtenemos algo equivalente a dos veces el perímetro del original, más dos veces el lado largo del original, más dos veces su lado corto, es decir, 3/2 veces el perímetro original. Por tanto, el original tenía un perímetro de 2(45/3)=**30 cm**.

9. Arturo tiene que salir de casa para comprar algunas cosas en la tienda de abarrotes, en la ferretería y en la papelería. Enseguida aparece una tabla con el tiempo que tarda Arturo en desplazarse de un sitio a otro en su bicicleta. Arturo desea encontrar la ruta más rápida que le permita salir a comprar las cosas que necesita y volver a casa. Por ejemplo, si Arturo utiliza la ruta casa - ferretería - tienda de abarrotes - papelería - casa le llevaría un total de 32 minutos de transporte. ¿Cuánto tiempo de transporte tiene la ruta más rápida que le conviene utilizar a Arturo?

ORIGEN	DESTINO	TIEMPO
Casa	Tienda de abarrotes	7 minutos
Casa	Ferretería	9 minutos
Casa	Papelería	5 minutos
Tienda de abarrotes	Casa	8 minutos
Tienda de abarrotes	Ferretería	9 minutos
Tienda de abarrotes	Papelería	9 minutos
Ferretería	Casa	8 minutos
Ferretería	Tienda de abarrotes	8 minutos
Ferretería	Papelería	8 minutos
Papelería	Casa	6 minutos
Papelería	Tienda de abarrotes	10 minutos
Papelería	Ferretería	8 minutos

Solución:

Cuando Arturo quiere moverse de un sitio a otro, notemos que la ruta óptima es tomar el camino directo entre el origen y el destino. De caso contrario estaría tomando uno o más sitios como puntos medios y esto lo obligaría a tomar al menos 2 caminos. Como el camino directo más largo tiene una duración de 10 minutos, y el más corto dura 5 minutos, es fácil ver que lo óptimo es tomar el camino directo en lugar de tomar más caminos.

De este modo, renombrando cada sitio por su inicial. Arturo solo tiene 6 caminos posibles,

en los cuales calcularemos el tiempo de cada uno:

$$C-T-F-P-C = 7+9+8+6=30$$

$$C-T-P-F-C = 7+9+8+8=32$$

$$C-F-T-P-C = 9+8+9+6=32$$

$$C-F-P-T-C = 9+8+10+8=35$$

$$C-P-T-F-C = 5+10+9+8=32$$

$$C-P-F-T-C = 5+8+8+8=29$$

En concusión, vemos que el camino óptimo es

casa - papelería - ferretería - tienda de abarrotes – casa con un costo de **29**.

10. Donají tiene un ramo con 50 flores, de ellas el 36% son blancas y el resto son rojas, ¿Cuántas flores rojas se deben de quitar del ramo para que el porcentaje de flores blancas sea de 60%?

Solución:

Como Donají tiene 50 flores y sabemos que el 36% de ellas son blancas, entonces tiene $\frac{50*36}{100}=18$ flores blancas y tiene $50-18=32$ flores rojas.

Como sólo nos piden quitar flores rojas, sabemos que siempre tendermos 18 flores blancas, las cuales representaran el 60% del total, así que $\frac{total*60}{100}=18 \rightarrow total*60=1800 \rightarrow total=\frac{1800}{60}=30$. Así que al final Donají tendrá $30-18=12$ flores rojas.

Donají deberá de quitar $32-12=\mathbf{20}$ flores rojas para que la cantidad de flores blancas sea de 60%.

11. ¿Cuál es el número entero más pequeño que es un múltiplo común de las fracciones 9/2 y 21/2?

Solución:

Como nos preguntan por un número entero, podemos buscar los números más cercanos a las fracciones dadas multiplicándolos por el número entero más pequeño (diferente de 0) de forma que el resultado sea un número entero. Así obtenemos los números 9 y 21.

Ahora buscaremos el mínimo común múltiplo de ambos números. Sabemos que $9 = 3 * 3$ y $21 = 3 * 7$, así que el mcm tiene que ser $3 * 3 * 7 = \mathbf{63}$.

Al escoger el mcm usando esos números primos podemos asegurar que el 9 y 21 dividen al mcm.

12. Dos números son 26% y 5% más que un tercer número, respectivamente. ¿Qué porcentaje adicional es el primer número respecto al segundo número?

Solución:

Como estamos trabajando con porcentajes, no importa qué valor escojamos para el tercer número. Por simplicidad digamos que el tercer número es 100, así que el primer número es 126 y el segundo número es 105.

Para conocer qué porcentaje adicional es el primer número respecto al segundo número podemos hacer una regla de 3:

105	100%
126	x

Así que $x = \frac{126*100\%}{105} = \frac{12600\%}{105} = 120\%$. Por lo tanto, el primer número tiene un **20**% adicional, respecto al segundo número.