34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

CASILLAS E INDUCCIÓN

Ana del Socorro Viramontes Medina

1. Principio de casillas

El principio de casillas, o principio de los palomares, de manera general, si se dispone de n casillas para colocar m objetos y $m > n$, entonces en alguna casilla deberán colocarse por lo menos dos objetos.

Principio de casillas, primera versión

"Si $n+1$ objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos dos objetos".

Ejemplos.

- En un grupo de tres personas, siempre hay al menos dos del mismo sexo. $(n = 2)$
- En un grupo de trece personas, siempre hay al menos dos que nacieron el mismo mes. $(n = 12)$
- En un grupo de 366 personas, siempre hay al menos dos que cumplen años el mismo día del año (mes y día). $(n = 365)$

Principio de casillas, segunda versión

"Si $nk + 1$ objetos se deben de acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar más de k objetos"

Ejemplos recíprocos:

- En un grupo de 17 personas, siempre hay al menos 9 personas del mismo sexo. $(n = 2, k = 8)$
- En un grupo de 37 personas, siempre hay al menos 3 que nacieron el mismo mes. $(n = 12, k = 3)$
- En un grupo de 4016 personas, siempre hay al menos 12 que cumplen años el mismo día del año (mes y día). $(n = 365, k = 11)$

Ejemplo: Un costal está lleno de canicas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando canicas del costal. ¿cuál es el mínimo números de canicas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 canicas del mismo color?

Solución. Si se sacan 20 canicas, en el peor de los casos las 20 canicas son de distintos colores, por lo que para asegurar tener 100 canicas de un mismo color, es necesario considerar el peor de los casos el cual sería obtener 99 canicas de los 20 colores distintos antes de obtener 100 canicas de un mismo color, sin embargo al sacar $20 \cdot 99 + 1 = 1981$ canicas, se asegura que incluso en el peor de los casos con 1981 canicas siempre habrá al menos 100 del mismo color

Principio de casillas, tercera versión

(a) "Si m objetos se deben acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar al menos $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ objetos".

(b) "Si m objetos se deben de acomodar en n casillas, entonces en alguna casilla deberán quedar a lo más $\left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ objetos".

$\lceil x \rceil$ es igual al menor entero que es mayor o igual a x.

$\lfloor x \rfloor$ es igual al mayor entero menor igual a x.

Nótese que si $m = nk + 1$, se tiene que $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{nk+1}{n} \right\rceil = \left\lceil k + \frac{1}{n} \right\rceil = k + 1$ y entonces la tercera versión generaliza la segunda versión.

Ejemplo. La selección de 16 alumnos de las olimpiadas de matemáticas, para su preparación resolvió 59 problemas. Cada problema fue resuelto solamente por un alumno, además hay cuatro alumnos que resolvieron exactamente 1, 2, 3 o 4 problemas respectivamente. Muestre que algún alumno resolvió al menos 5 problemas.

Solución. Los cuatro alumnos que se mencionaron resuelven $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ problemas entre ellos. Por lo que luego quedan 49 problemas para ser resueltos por 12 alumnos. Como $\left\lceil \frac{49}{12} \right\rceil = 5$, algún alumno deberá resolver 5 o más.

2. Problemas

1. Demuestra que, de 12 números distintos de dos dígitos, siempre hay dos cuya diferencia es un número de dos dígitos iguales.
2. Demuestra que en una fiesta siempre hay dos personas que conocen al mismo número de personas.
3. En un triángulo de área 4 se colocan 9 puntos. Muestra que hay tres de ellos que forman un triángulo de área menor o igual que 1.
4. Con los vértices de una cuadricula de 6 × 9, se forman 24 triángulos. Muestre que hay dos triángulos que tienen un vértice común.
5. En un triángulo equilátero de lado 3 se colocan 4 puntos. Muestre que hay dos de ellos a una distancia menor o igual a $\sqrt{3}$

6.
    a) Pueden las casillas de un tablero de 3 × 3, llenarse con números del conjunto {−1, 0, 1}, de manera que la suma de los números en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal sean diferentes
    b) Pueden las casillas de un tablero de 3 × 3, llenarse con números del conjunto {−1, 0, 1}, de manera que la suma de los números en cada renglón y en cada columna sean diferentes.
7. En el espacio se dan 9 puntos de coordenadas enteras y de forma que no hay tres colineales. Muestra que hay un punto de coordenadas enteras entre algún par de ellos.
8. Dentro de un disco de radio 1 hay 7 puntos, de manera que la distancia entre cada par de ellos es mayor o igual 1. Muestre que uno de los puntos es el centro del círculo.
9. Un triángulo equilátero de lado 1, no puede ser cubierto totalmente con dos triángulos equiláteros de lados menores que 1.
10. (OMM 1990/5) En el plano se dan 19 puntos de coordenadas enteras de manera que no hay tres de ellos colineales. Muestre que hay 3 de ellos con la propiedad de que el centroide del triangulo que forman también tiene coordenadas esteras.
11. Sean a, b, c y d enteros. Muestre que 12 divide al producto $(a-b)\cdot(a-c)\cdot(a-d)\cdot(b-c)\cdot(b-d)(c-d)$.
12. En un cuadrado de lado 1 se colocan 51 puntos. Muestre que hay 3 puntos que pueden cubrirse con un disco de un radio $\frac{1}{7}$.
13. (Rusia 2002) Sobre un tablero de ajedrez se colocan 8 torres de manera que no se ataquen (esto es, no hay 2 en un mismo renglón, y no hay 2 en una misma columna). Muestre que hay dos de las distancias entre pares de torres que son iguales. La distancia entre dos torres es la distancia entre los centros de los cuadraditos donde están las torres.
14. En un torneo de futbol cada equipo juega una vez exactamente con cada uno de los demás. Los juegos se realizan siempre los domingos. Probar que cualquier lunes siempre hay dos equipos que han completado exactamente el mismo número de juegos.
15. Probar que, si cada punto del plano se colorea de rojo o azul, forzosamente habrá un segmento de longitud 1 cuyos extremos tengan el mismo color.
16. Sea p un número primo distinto de 2 y 5. Probar que hay una infinidad de términos en la sucesión $1,11,111,1111,\dots$ que son múltiplos de p.
17. Sean $a_1, a_2, . . ., a_{10}$ enteros. Probar que existen $\epsilon_1, \epsilon_2, . . ., \epsilon_{10}$ no todos ceros tales que $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \cdots + \epsilon_{10} a_{10}$ es múltiplo de 1000.
18. Muestre que no hay siete enteros positivos diferentes y menores a o iguales a 24, de manera que las sumas de los elementos de sus subconjuntos sean todas diferentes.
19. Muestre que entre 100 enteros positivos diferentes se puede asegurar que hay dos de ellos cuya suma es al menos 199.

20. A una reunión de matemáticos solamente llegarán argentinos, brasileños y colombianos. ¿Cuál es la menor cantidad de personas que deben asistir para asegurar que lleguen al menos 5 argentinos, o al menos 7 brasileños, o al menos 9 colombianos?

3. Datos de vital importancia

1. El juego del gato o "tres en raya" no solamente carece de una estrategia ganadora, tiene cientos de variantes y se puede encontrar lo mismo tallado en piedras del antiguo Egipto que en los asientos del coro de la catedral de Canterbury, también prepara y da suerte en el amor, conforme a Ovidio. https://elibro.net/es/ereader/uaa/127786?page=154
2. La última voluntad de Gauss fue que se grabara en su tumba un heptadecágono. Al día de hoy, no se ha cumplido. https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

4. Inducción

La inducción matemática es un método muy útil en algunas demostraciones. Se emplea generalmente para probar fórmulas o propiedades de números naturales.

Una proposición *p(n)* es verdadera para todos los valores de la variable *n* si se cumplen las siguientes condiciones:

- **Base inductiva:** La proposición *p(n)* es verdadera para *n* = *Natural*. Encuentra un caso base, es decir, el número natural más pequeño que cumple la proposición.

Para demostrar una fórmula o propiedad aplicada en los números naturales, siempre se comprueba el funcionamiento de la fórmula para el menor número posible, ya que, si no se encuentra una base, es decir, un número para el cual funcione la fórmula, no tiene caso suponer que existe un número k que lo cumple.

- **Hipótesis de inducción:** Se supone que *p(k)* es verdadera, donde *k* es un número natural cualquiera. Creer que la proposición se cumple para el caso *k*.

Si existe una base inductiva (el funcionamiento de la fórmula para el menor número) se supone que el funcionamiento de la fórmula se aplica a cualquier número k.

- **Paso inductivo:** Se demuestra que *p(k+1)* es verdadera. Usando el paso anterior tienes que demostrar que si se cumple para *k*, también se cumple para *k+1*.

Teniendo como hipótesis el funcionamiento de la fórmula para un número k se comprueba el funcionamiento para $k+1$, de esta manera, si funciona para k funciona para $k+1$, además ya que se tiene un base de inducción se puede decir que los números enteros a partir de la base de inducción cumplen con la fórmula.

Si se cumplen los puntos anteriores entonces la proposición es verdadera desde el caso base hasta el infinito.

Ejemplo. Sea $a_1, a_2, a_3, \dots$ una sucesión aritmética con diferencia d (es decir, para todo n, $a_{n+1} = a_n + d$. Probar que para $n \geq 2$ se tiene $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Solución:

Se tiene que $a_{n+1} = a_n + d$ y se quiere probar que $a_n = a_1 + (n-1)d$, para $n \geq 2$.

Base de inducción

Como la fórmula funciona para $n \geq 2$, se propone como base de inducción el caso cuando $n = 2$.

$a_2 = a_1 + d$, por definición de la sucesión

$a_2 = a_1 + (2-1)d$, en base a la fórmula a comprobar

Como $a_1 + d = a_1 + (2-1)d$, se comprueba la base de inducción

Hipótesis de inducción

Luego se propone la hipótesis de inducción, se supone que funciona para un número a_k

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

Paso inductivo

Luego para el paso inductivo se analiza a_{k+1}

Se tiene que $a_{k+1} = a_k + d$ por definición.

Además $a_k = a_1 + (k-1)d$ por la hipótesis de inducción.

Entonces $a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k-1+1)d = a_1 + (k)d$

Ahora bien, como la hipótesis de inducción funciona para a_{k+1}, se comprueba el funcionamiento de la fórmula.

5. Problemas

Demuestra todos estos problemas usando inducción. Siempre que vayas a escribir una solución con inducción, es importante que escribas que sección es la base de inducción, hipótesis de inducción y el paso inductivo.

1. Sumatoria de Gauss.
2. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$
3. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
5. $\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
6. $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$
7. $6|n^3+5n$
8. $k-1|k^n-1$
9. El total de diagonales de un polígono convexo de *n* lados ($n \geq 3$), es $\frac{n(n-3)}{2}$
10. $(3n)! > 2^{6n-4}$
11. La sucesión de Fibonacci $F_1, F_2, F_3, \ldots$ se define como sigue: $F_1=1, F_2=1$ y, para $n \geq 3$ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Demuestre que
$$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$
12. Demuestre que $(F_1)^2+(F_2)^2+\cdots+(F_n)^2=F_n*F_{n+1}$
13. $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$
14. Demostrar que todo conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.
15. Demostrar por inducción que todo conjunto tiene la misma cantidad de subconjuntos con un número par de elementos que con un número impar.
16. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$
17. $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$
18. Si $a_1=1$ y, para $n \geq 2$, $a_n=n+(-1)^n a_{n-1}$, ¿Cuánto valen $a_{1000}, a_{2001}, a_{3002}, a_{4003}$? (Sugerencia: Hacer inducción por bloques de tamaño 4)
19. Definamos una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ como sigue $a_0=1$ y, para $n \geq 1$
$$a_n=\binom{n}{0}a_0+\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2+\cdots+\binom{n}{n+1}a_{n-1}$$
Probar que todos los términos de la sucesión son impares.
20. Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ la sucesión de números definida recursivamente como sigue $a_0=-1$, $a_1=1$ y, para $n \geq 2$, $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Probar por inducción que para $n \geq 1, a_n \geq 0$.

6. Vídeos

Casillas

https://youtu.be/wWQxk6Q31Ng

Inducción

https://youtu.be/w1xKj05urb4