34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

BIYECCIONES

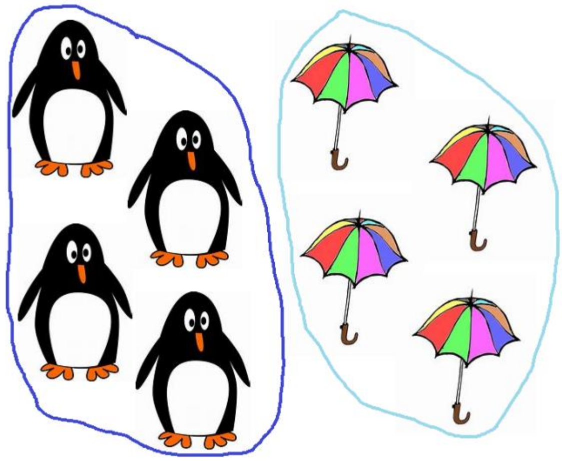
Juan Carlos Martín Coronado

1. Biyecciones

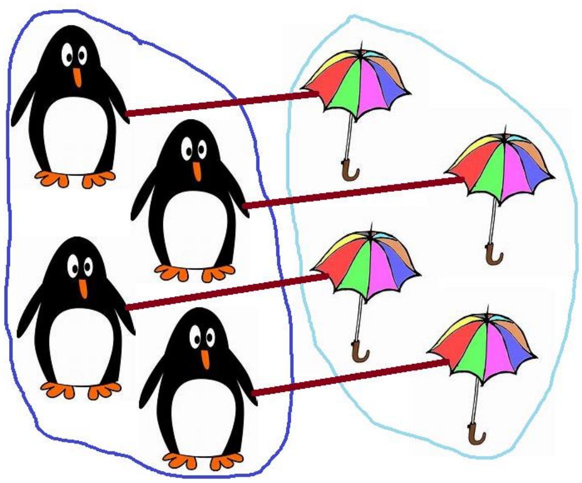
La señorita Coco Drilú nos refirió la siguiente anécdota.

*En alguna ocasión, tuve ocasión de asistir a una fiesta terriblemente aburrida. Tan aburrida era, que decidí contar el número de invitados en busca de una mínima dosis de entretenimiento. Sin embargo, esto fue problemático, pues los susodichos estaban tan aburridos que no se podían quedar quietos. Iban de un salón a otro sin parar y yo no podía estar seguro de haberlos contado a todos, por no hablar ya de cómo mi memoria fallaba y me hacía dudar de si había contado ya a ese o a aquél. Ante la inutilidad de mis esfuerzos, me decidí a irme, a sabiendas de que tendría que someterme al escrutinio público por ser el primero en salir de tan horrible reunión. Mas he aquí que en la entrada me encontré con un paragüero, el mismo paragüero en que yo mismo había puesto mi paraguas, ese paragüero donde todos los presentes habían dejado sus paraguas al entrar. Y en una noche de verano como aquélla, en que era seguro que iba a llover torrencialmente, solamente a un completo inepto se le habría ocurrido salir sin llevar ese símbolo de la civilización. Como el anfitrión de esa terrible velada no hacía amistad sino con gente capaz, inteligente, me di cuenta de que no podía haber entre los invitados ninguno que haya venido sin el más fiel de los acompañantes. Y me dije a mí misma "¿Cómo no te diste cuenta antes? Pero sí es obvio que si cada paraguas le corresponde a un invitado (¿qué clase de i*****l llevaría dos?) hay al menos tantos invitados como paraguas. Y si todos los invitados dejaron sus paraguas en el paragüero, entonces no puede haber más invitados que paraguas en el paragüero. Un mínimo que es el máximo es una opción única, hay tantos invitados como paraguas en el paragüero". Así que conté los paraguas, había 71, lo que implicaba la perturbadora conclusión de que había 71 personas que tuvimos que soportar tan mísero intento de trasnochar.*

Puede que no hayas leído ese rollo, pero lo que nos interesa aquí es ver la ingeniosa estrategia de Drilú para contar los invitados a esa fiesta. Drilú observa dos grupos que no tienen relación alguna a primera vista, los paraguas y los invitados (no pudimos usar fotos por motivos legales).

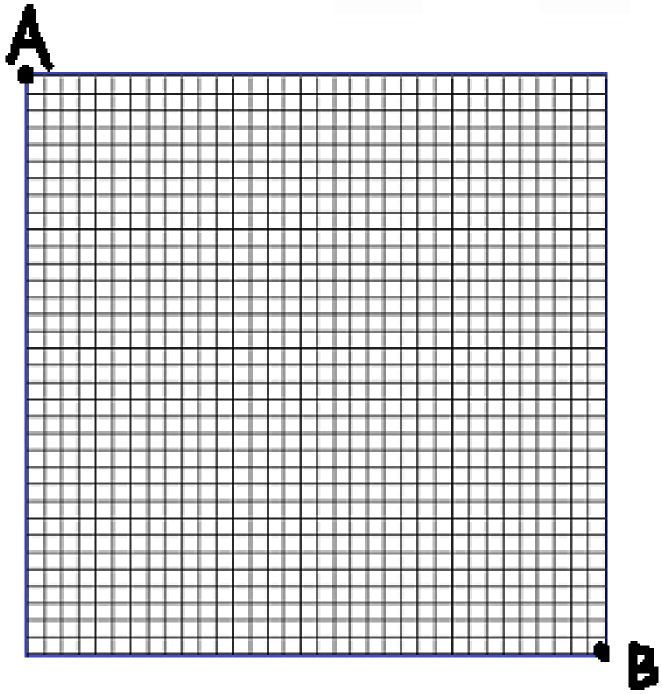


Sin embargo, Drilú observa dichos grupos y se percata de que hay una relación de equivalencia entre ambos grupos, a cada invitado le corresponde un paraguas y a cada paraguas le corresponde un invitado.

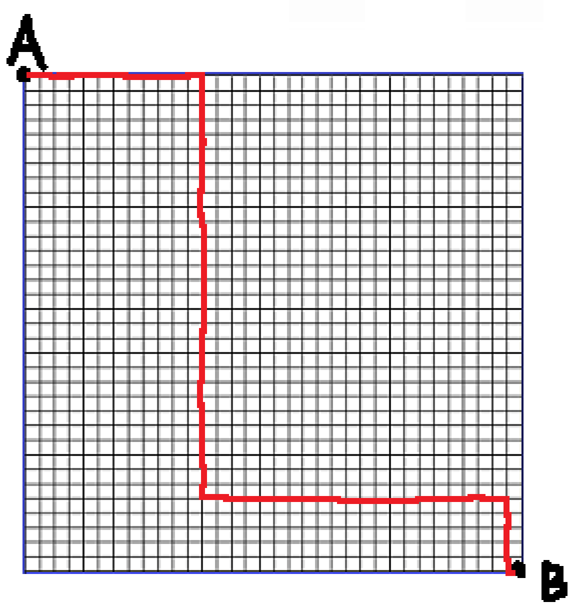


Y finalmente, nuestra buena Coco Drilú cuenta los elementos de un grupo (invitados) al contar los elementos del segundo. Esta estrategia (ver que dos cosas se corresponden entre sí y usar dicha correspondencia), es muy común en matemáticas, especialmente en combinatoria, y se le llama **biyección.**

Una biyección común es representar como series de letras. Por ejemplo, en el problema de determinar las formas de llegar del punto A al punto B mediante las líneas, si solamente podemos movernos hacia abajo y a la derecha:



Este problema puede parecer engorroso (¡es una cuadrícula de 34X34!), pero resulta sorprendentemente sencillo, si nos damos cuenta de que tendremos que avanzar 34 veces una unidad (cuadrito) hacia abajo y 34 hacia la derecha y luego, por algún motivo, se nos ocurre que podemos representar ir una unidad hacia abajo con la letra A e ir una hacia la derecha con la letra D. De tal manera, podemos relacionar cada posible camino con una palabra de 68 letras, 34 A y 34 D y cada palabra con un camino. Por ejemplo, DDDDDDDDDDDDAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAADDDDDDDDDDDD DDDDDDDDDAAAAAD se corresponde con:



Para contar las palabras simplemente escogemos 34 letras para que sean A, siendo el resto D, es decir, hay ${}_{68}C_{34}$ palabras y la misma cantidad de caminos.

Cabe mencionar que también es relativamente común hacer biyecciones en que representemos ciertas situaciones como un camino particular, en que moverse de tal o cual forma represente tal o cual acción. Sin embargo, no mostraremos ejemplos de ello de momento, ilustrando en su lugar una estrategia conocida, la de separadores, mediante un ejemplo sencillo, a saber, ¿cuántas formas hay de pedir 13 helados, si los sabores disponibles son chicharrón, mayonesa y aguacate?

Aquí, podemos ordenar los helados según su sabor, poniendo primero los de chicharrón, luego los de mayonesa y al final los de aguacate. Como no sé dibujar helados, voy a escribir algo así QQQQQQ/QQQQ/QQQ y haremos de cuenta que las Q son helados y las diagonales me representan los cambios de sabor, teniendo en el ejemplo 6 helados de chicharrón, 4 de mayonesa y 3 de aguacate. Si quisiéramos puros helados de mayonesa tendríamos algo así /QQQQQQQQQQQQQ/, mientras que 5 de chicharrón y el resto de aguacate sería QQQQQ//QQQQQQQQ. De manera general, podemos representar cada compra de helados como una palabra compuesta por trece Q y 2 diagonales. Acomodando las diagonales, tenemos que hay ${}_{15}C_{2}$=105 maneras de comprar los helados. A dichas diagonales que nos permiten resolver el problema les llamamos separadores, pues nos permiten separar los elementos (helados) al clasificarlos en distintas clases (sabores).

Hay diferentes formas de aplicar una biyección en un problema, pero estas son las más básicas y también de las más útiles.

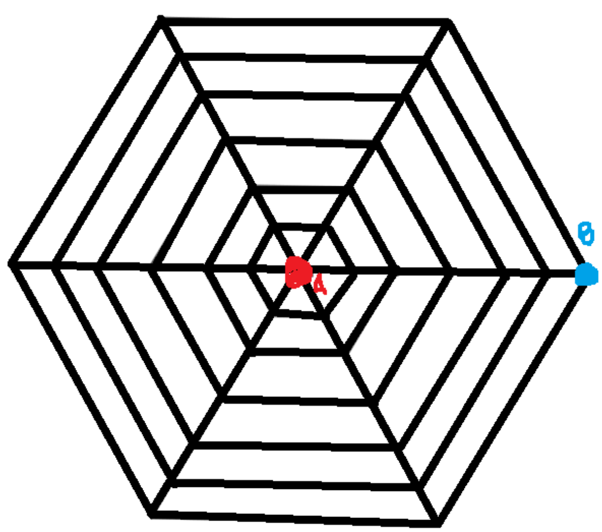
2. Datos de vital importancia

1. El famoso juego de mover un lobo, una gallina y un elote a través de un río fue inventado por Alcuino, como parte de una reforma educativa encargada por Carlomagno, al igual que muchos otros que siguen siendo conocidos y usados hoy día. https://elibro.net/es/ereader/uaa/127786?page=154
2. El fullereno es un icosaedro truncado que lleva ese nombre en honor a Richard Buckminster Fuller, quien utilizó el concepto para construir las llamadas cúpulas geodésicas https://elibro.net/es/lc/uaa/titulos/37796

3. Problemas

1. Una sonda marina cúbica se puede mover hacia arriba, hacia la derecha y hacia delante, un metro cada vez. ¿De cuántas formas puede llegar a la salida de una cueva, que se encuentra 13 metros a su derecha, 7 hacia delante y 11 hacia arriba?

2. ¿De cuántas maneras se puede llegar de (3,2) a (13, -5) en 23 movimientos o menos, si un movimiento consta en moverse una unidad horizontal o verticalmente?
3. ¿De cuántas maneras se pueden escoger 15 enteros no necesariamente distintos entre el 1 y el 30, inclusive?
4. ¿De cuántas maneras se pueden traer 30 tacos de pastor, bistec, suadero y tripa, si…?
   a. no hay restricciones?
   b. se deben traer al menos 2 de cada uno?
   c. se deben traer a lo más 4 de tripa?
   d. se deben traer al menos 3 de pastor y a lo más 5 de suadero?
5. ¿De cuántas maneras se pueden traer 8 galletas, si hay 15 tipos diferentes?
6. ¿Cuántos términos tiene (a+b+c)^7 y de qué forma son?
7. El punto B se encuentra 15 metros al frente y 2 metros arriba del punto A. Se quiere comunicar ambos puntos con una escalera cuyos escalones tengan una altura de 20 cm y una longitud múltiplo de 1 metro, sin que necesariamente el primer escalón empiece en A ni el último termine en B. ¿Cuántas formas hay de hacer esto?
8. Drini tiene un tablero que mide 3 casillas de alto por 2014 casillas de ancho y mueve una ficha por el tablero conforme a la siguiente regla. Si la ficha está en una casilla, en el siguiente paso se puede mover a una casilla inmediatamente vecina que esté arriba, abajo, a la derecha o a la izquierda de su posición actual. Al principio, Drini coloca la ficha en la casilla inferior izquierda, ¿de cuántas formas puede mover la ficha hasta la casilla superior derecha, si cada recorrido debe visitar todas las fichas del tablero y no puede pasar dos veces por la misma casilla?
9. La araña en A quiere llegar a la mosca en B caminando por los hilos de su telaraña, sin pasar dos veces por el mismo hilo ni alejarse de la orilla de su telaraña al moverse. ¿de cuántas maneras puede hacer esto?



10. Un pulpo tiene 8 tentáculos, 13 calcetines y 15 zapatos. ¿De cuántas formas se puede poner un calcetín y un zapato en cada tentáculo, tomando en cuenta el proceso y no solamente el resultado final, si la única condición es que no puede ponerse un zapato en un tentáculo que no tenga un calcetín?