SUMAS TELESCÓPICAS

Ricardo Antonio Gutiérrez Esparza
Contacto: 0226154@up.edu.mx

1. Repaso de sucesiones

Definición: Una sucesión de números es una *función* que asigna a cada entero positivo un número distinto. El número asignado por la sucesión al entero n es comúnmente denotado con un subíndice, por ejemplo a_n. Estos números son llamados los *términos* de la sucesión. Puedes pensar en las sucesiones como listas de números.

Veíamos que existen varios tipos de sucesiones, pero hay dos que nos interesan de manera especial: las **aritméticas** y las **geométricas**

Sucesiones aritméticas: Una sucesión aritmética es una sucesión o colección de números de tal manera que cada uno de los términos de la sucesión se puede obtener del anterior sumando una cantidad fija. En términos más formales, tenemos que $a_n = a + (n-1)d$, para a, d constantes y $d \neq 0$. El número a es el primer término de la sucesión (de manera que $a_1 = a$) y d es la cantidad fija de la que hablábamos, también llamada **diferencia de la sucesión**.

Algunas propiedades:

a) El término a_n es igual a $a_1 + (n-1)d$, para $n = 1, 2, \ldots$
b) $a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
c) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \; para \; n = 2, 3, \ldots$

Sucesiones Geométricas: Una sucesión geométrica es una sucesión de números relacionados de tal manera que cada uno se puede obtener de anterior multiplicando a éste por una cantidad fija llamada razón común o **razón de la sucesión** (denotada por r). La sucesión $\{a_n\}$ es geométrica si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ es una constante para $n \geq 1$. Sabiendo esto, podemos decir que cada término se define como $a_n = a * r^{n-1}$, con $r \neq 0{,}1$. Aquí nuevamente a es una constante y coincide que $a_1 = a$.

Algunas propiedades

a) El término $a_n = a_1 r^{(n-1)}$, para $n = 1, 2, \ldots$
b) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ para $n = 1, 2, \ldots$
c) Si los términos son positivos, se tiene que $a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$, para $n = 2, 3, \ldots$

Veíamos también que existían otras sucesiones interesantes, como las **sucesiones recursivas**, en las cuales el término a_n está definido con base en los términos anteriores $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, como en la sucesión de Fibonacci, que se define de la siguiente manera:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ f_1 = 0,\ f_2 = 1$$

2. Sumas

Una suma, en el contexto de las sucesiones, se refiere al resultado de añadir alguna cantidad de elementos consecutivos. En el caso de las sucesiones aritméticas y geométricas, veíamos que evaluar una suma es muy sencillo, puesto que existen fórmulas directas con las que podemos obtener el resultado (cabe destacar que en realidad es la regularidad[1] de las sucesiones lo que hace que sea fácil obtener las sumas. Darles el crédito a las fórmulas es una forma de simplificar la explicación, es importante que recuerdes de dónde vienen estas fórmulas).

Ejemplo:

- La suma de los primeros 2020 términos de 2, 5, 8, … es $\frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{2020}{2}(2 + 2019 * 3 + 2) = 6{,}126{,}610$
- La suma de los primeros 34 términos de 6, 12, 24, … es $a\frac{1-r^n}{1-r} = 6\left(\frac{1-2^{34}}{1-2}\right) = 103{,}079{,}215{,}098$

Los problemas aparecen cuando nos enfrentamos a sucesiones no tan regulares. Calcular los primeros n términos de la sucesión de Fibonacci (que recordemos que es una sucesión recursiva), por ejemplo, ya no es una tarea tan sencilla.

3. Notación sigma (Σ)

La notación sigma es una forma común de representar sumas en varias ramas de las matemáticas. Posiblemente ya te hayas encontrado con esta notación en algún punto del concurso, pero vale la pena repasar este importante tema.

Recordando la definición de sucesión, veíamos que la podemos pensar como una función a la que asigna a cada número natural (1, 2, 3, …) un término. En el material de sucesiones veíamos que esta función se puede ver como una expresión algebraica. De esta manera, podemos poner la sucesión 1, 3, 5, 7… de una forma más elegante, de la siguiente manera: $a_n = 2n - 1$. Decimos que es más elegante

[1] La regularidad de las sucesiones proviene de que cada término está a la misma distancia del inmediato siguiente. En el caso de las aritméticas en una escala natural (se suma una distancia constante), y en el caso de las geométricas en una escala logarítmica (se multiplica una razón constante).

puesto que se muestra una regla general para obtener cualquier término. Otros ejemplos son

- -5, -11, -17, … se puede expresar como $a_n = -6n + 1$
- 14, 42, 126, … se puede expresar como $a_n = 14 * 3^{n-1}$
- 2, 5, 10, 17, … se puede expresar como $a_n = n^2 + 1$

Podemos usar esta forma "elegante" de expresar las sucesiones para expresar las sumas, también de una mejor manera. Aquí entra la notación sigma. Consideremos la sucesión $a_n = 2n - 1$. Como vimos anteriormente, sus primeros términos son 1, 3, 5, … Si yo quisiera expresar la suma de los primeros n términos, puedo hacer los siguiente:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

Aquí usamos la letra griega sigma mayúscula para representar la suma. Este operador consta de varias partes

Límite superior

Expresión (fórmula)

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1)$$

Índice de la suma

Límite inferior

El índice de la suma indica una variable que inicialmente tendrá el valor del límite inferior, y que recorrerá los valores enteros hasta alcanzar el límite inferior.

La forma general de expresar la suma de los primeros n términos de una sucesión sería la siguiente:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_1$$

Que es equivalente a

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Algunos ejemplos de la notación sigma son:

- $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
- $\sum_{i=3}^{10} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$
- $\sum_{k=0}^{3} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$

Ejercicio: Evalúa[2] las siguientes expresiones

1. $\sum_{k=0}^{10}(3k-2)$
2. $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{6}{i}+i\right)$
3. $\sum_{i=1}^{100}(i^2+i+1)$

4. Datos de vital importancia

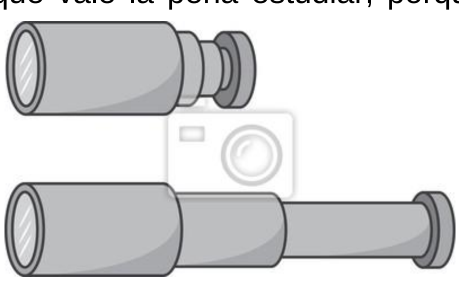
1. En Egipto se consideraban fracciones solamente las de denominador 1 (unitarias), por lo que el resto de fracciones se expresaban como suma de estas fracciones, lo que se conoce como fracción egipcia. https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99
2. A los 3 años de edad, Gauss corrigió un error de cálculo por parte de su padre. A los 10 años, su maestro de escuela ordenó a los alumnos que sumaran los números del 1 al 100, intentando lograr algo de paz. Gauss escribió inmediatamente el resultado en su pizarra, mediante el uso de una fórmula conocida que intuyó en ese momento. https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

5. Sumas telescópicas

Una suma telescópica es un tipo de suma que tiene una característica que hace que sea sencilla de evaluar. Cuando tenemos una suma de la siguiente manera $\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$ se puede desarrollar así

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]$$
$$=\cancel{f(2)}-f(1)+\cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}+\cancel{f(4)}-\cancel{f(3)}\ldots+f(n+1)-\cancel{f(n)}$$

Entonces, los términos $f(k)$ para $2\leq k\leq n$ se cancelan, quedando como resultado de la suma $f(n+1)-f(1)$. Esto es una suma telescópica, y es una idea interesante que vale la pena estudiar, porque este razonamiento se puede extender para la resolución de otros problemas.



Como dato curioso antes de continuar, se les llama sumas telescópicas puesto que, al cancelarse los términos del medio, pareciera colapsar, tal y como lo hace un telescopio de mano.

[2] Evaluar significa obtener el valor numérico de una expresión algebraica. Más detalles aquí.

Si te parece que este tema es demasiado fácil es porque hay un detalle que falta mencionar. En la mayoría de las ocasiones, la suma que deberemos de efectuar no se nos presentará de forma evidente, por lo que será necesario realizar manipulaciones algebraicas en la expresión dada para poder evaluarla por este simple método, y es aquí donde se pone interesante. Veamos un ejemplo.

Tratemos de evaluar la suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

Esto no se parece a una telescópica, sin embargo, hay que notar que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Sabiendo esto, podemos sustituir la expresión obtenida en la suma y nos queda de la siguiente manera

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Luego tenemos varios términos que se van a cancelar, resultando en lo siguiente

$$\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

De esta manera, la solución de la suma es $\frac{n}{n+1}$.

El paso de transformar la suma dada en una telescópica es la parte interesante de resolver este tipo de problemas, y te será de gran ayuda que tengas la suficiente práctica con la manipulación algebraica[3].

6. Productos ¿telescópicos?

Antes de terminar, vale la pena saber que esta idea se puede aplicar también con las multiplicaciones, pues si tenemos un producto como este $\prod_{k=1}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}$, puede ser evaluado como se muestra a continuación. Por cierto, el símbolo que se muestra (Π) es la letra griega pi, pero en mayúscula. Se utiliza para representar un producto de la misma manera que la sigma mayúscula (Σ) sirve para representar una suma. Volviendo a la explicación:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{f(k+1)}{f(k)}=\frac{f(2)}{f(1)}\times\frac{f(3)}{f(2)}\times\frac{f(4)}{f(3)}\times\ldots\times\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(n+1)}{f(1)}$$

[3] Te recomendamos revisar los materiales anteriores de álgebra aquí.

Ojo que aquí hay que asegurarnos que cada $f(k)$ (salvo $f(n+1)$ quizá) sea diferente de 0, pues de otra forma tendríamos que dividir entre 0, operación que no está determinada.

Aplicar esto sería, por ejemplo, para evaluar el producto $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$. Hay que notar que $1-\frac{1}{k}=\frac{k}{k}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$, de forma que el producto nos queda así

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

Resultando en $\frac{1}{n}$.

Pregunta rápida: ¿Qué pasaría si el límite inferior de nuestra suma, en vez de ser $k=2$ fuera $k=1$? ¿Y si es $k=0$?

Ahora lo único que resta es practicar esta técnica.

7. Problemas

1. (Adaptación 2019 AMC 8) ¿Cuál es el valor del producto

$$\left(\frac{1*3}{4}\right)\left(\frac{2*4}{9}\right)\left(\frac{3*5}{16}\right)\ldots\left(\frac{97*99}{9604}\right)\left(\frac{98*100}{9801}\right)$$

2. (Canadá, 1969). Calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} k!\cdot k$.
3. Evalúa el siguiente producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2019^2}\right)$
4. Encuentra la suma de $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$
5. Evalúa $\sum_{i=2}^{100}\frac{1}{\sqrt{i-1}+\sqrt{i}}$
6. Simplifica las siguientes sumas
   a. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$
   b. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
   c. $\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{k^2+5k+6}$
   d. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+4k}$

7. (Rumania, 2013) Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + \cdots + a_k \leq k$, para $k = 1, \dots, n$. Muestre que

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

8. Evalúa las siguientes sumas
   a. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
   b. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$
9. Evalúa el siguiente producto

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$$

10. Para cada entero positivo n sea $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^3$. Determina el valor de la suma $\frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_3-1} + \cdots + \frac{1}{a_{100}-1}$.
11. (ORO, 2019) Demuestra que para cada entero $n > 1$ existen enteros x y y tales que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}.$$