SOLUCIONES

1. Demuestra que ninguno de los números 2093, 209093, 20909093, 2090909093, etc, es primo.

Solución

Primero hacemos la factorización en primos de $2093 = 7 * 13 * 23$.

Forma 1

Podemos observar que el segundo número se puede expresar como $209093 = 2093 * 100 - 207$.

Después, factorizando $207 = 3^2 * 23$.

Como $23|2093 * 100$ y $23|207$, entonces $23|209093 = 2093 * 100 - 207$.

El tercer número se puede expresar como $20909093 = 209093 * 100 - 207$, entonces se aplica lo mismo. Esto se repetirá con todos los números.

Forma 2

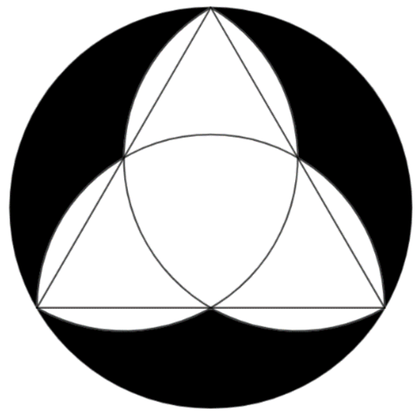
Podemos observar que el segundo número se puede expresar como $209093 = 2093 + 207 * 1000$.

Después, factorizando $207 = 3^2 * 23$.

Como $23|2093$ y $23|207 * 1000$, entonces $23|209093 = 2093 + 207 * 1000$.

El tercer número se puede expresar como $20909093 = 209093 + 207 * 100000$, entonces se aplica lo mismo. Esto se repetirá con todos los números, solo cambiaría la potencia de 10 por la que estaría multiplicado el 207.

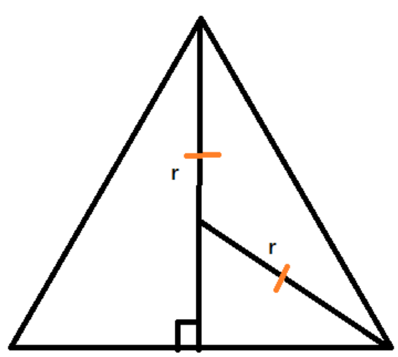
2. En un triángulo equilátero con lados de 33 cm se trazan 3 semicircunferencias sobre sus lados como se muestra en la figura. Calcule el área sombreada.



Solución

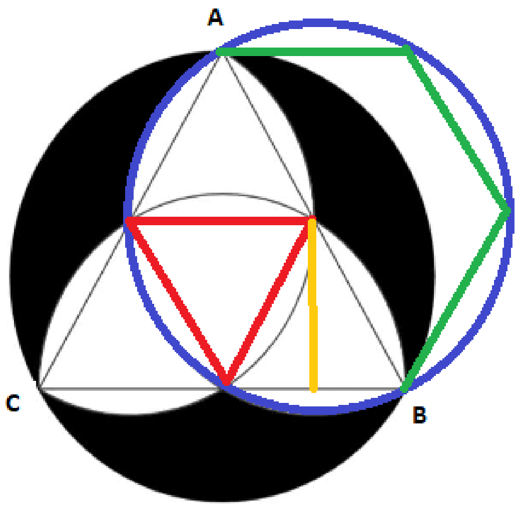
Para obtener el radio del circuncírculo del triángulo ABC:

El centro del círculo será el punto que esté a la misma distancia de los vértices del triángulo (ya que se encuentran en la circunferencia). Así que, por Pitágoras, se puede obtener la ecuación $(h-r)^2+\left(\frac{33}{2}\right)^2=r^2 \rightarrow h^2-2hr+r^2+\frac{33^2}{4}=r^2 \rightarrow r=\frac{h}{2}+\frac{33^2}{8h}=\frac{33\sqrt{3}}{4}+\frac{11\sqrt{3}}{4}=11\sqrt{3}$



Así que el área de la circunferencia será $\pi\left(11\sqrt{3}\right)^2=363\pi$

Forma 1



Como el triángulo ABC es equilátero el diámetro de cada semicircunfencia es de 33 cm.

Si se unen los puntos medios de cada lado del triángulo ABC se obtienen 4 triángulos congruentes más pequeños.

Si reflejamos una semicircunferencia por un lado del triángulo se forma una circunferencia con un hexágono regular.

Como las 3 semicircunferencias son congruentes los 6 segmentos de circulo alrededor del triángulo congruentes y su área es igual a la que se forma por el área del circulo azul menos el área del hexágono.

Obtenemos la altura del triángulo ABC. Por Pitágoras sabemos que la altura es igual a $\sqrt{33^2-\left(\frac{33}{2}\right)^2}=\frac{33\sqrt{3}}{2}$

El área de los 6 segmentos de círculo es: (área del círculo azul - área del hexágono)

El área del círculo azul es $\pi\left(\frac{33}{2}\right)^2$

El área del hexágono es $\frac{P*a}{2}$ = $\frac{(3*33)*\frac{33\sqrt{3}}{4}}{2}=\frac{3*33^2\sqrt{3}}{8}$

El área del circulo azul - área del hexágono = $\pi\left(\frac{33}{2}\right)^2-\frac{3*33^2\sqrt{3}}{8}$

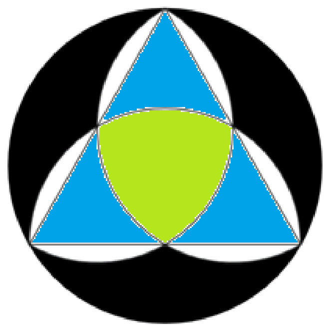
El área sombreada es: área del circuncírculo de ABC – (área de triangulo ABC + área de los 6 segmentos)

$= \quad 363\pi - \left[\left(\frac{33^2\sqrt{3}}{4}\right) + \left(\pi\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{3*33^2\sqrt{3}}{8}\right)\right] = 363\pi - \pi\left(\frac{33}{2}\right)^2 + \frac{33^2\sqrt{3}}{8} = \frac{363}{4}\pi + \frac{33^2\sqrt{3}}{8}$

Forma 2

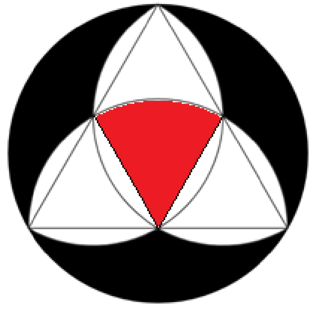
Calculado el área de las tres semicircunferencias $3 * \frac{\pi}{2}\left(\frac{33}{2}\right)^2$.

Pero al calcular esas áreas se estaría contando 3 veces el área verde y 6 veces las áreas azules.

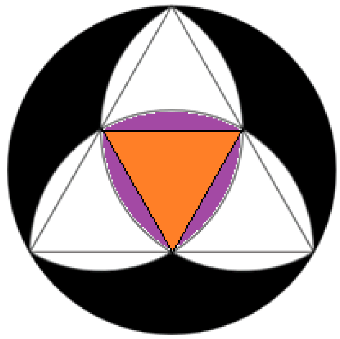


Al restar al área de las semicircunferencias el área del triángulo grande, solo se estaría contando 2 veces el área verde y una vez todas las demás. $3 * \frac{\pi}{2}\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{33^2\sqrt{3}}{4}$.

Podemos observar que el área roja es un tercio del área de una semicircunferencia $\frac{\pi}{6}\left(\frac{33}{2}\right)^2$.



Y podemos obtener el área de los gajos morados, restándole al área roja el área naranja, que sería un cuarto del triángulo grande. $\frac{\pi}{6}\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{33^2\sqrt{3}}{16}$



Entonces, el área central (verde) es tres veces un gajo más el área naranja $\frac{\pi}{2}\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{33^2\sqrt{3}}{8}$

Así que el área de la figura no sombreada será $3 * \frac{\pi}{2}\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{33^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{33}{2}\right)^2 + \frac{33^2\sqrt{3}}{8} = \pi\left(\frac{33}{2}\right)^2 - \frac{33^2\sqrt{3}}{8}$

El área sombreada será el área de la circunferencia menos el área no sombreada

$$363\pi - \pi\left(\frac{33}{2}\right)^2 + \frac{33^2\sqrt{3}}{8} = \frac{363}{4}\pi + \frac{33^2\sqrt{3}}{8}$$

3. Se tienen a, b, c enteros positivos

a. Demuestra que, para cualquier valor de b par, hay una cantidad impar de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ que tienen una única solución real.

b. Demuestra que el producto de las soluciones del inciso anterior es -1.

Solución

Inciso a

Cuando tenemos una ecuación de segundo grado, es sabido que el *determinante* ($b^2 - 4ac$) nos puede ayudar a conocer la cantidad de soluciones de la ecuación. En este caso, sabemos que si el determinante es igual a 0, la ecuación tendrá una única solución real.

Lo anterior significa que necesitamos que $b^2 - 4ac = 0$. Despejando b, tenemos que $\frac{b^2}{4} = ac \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac$. Como b es par, tenemos que $\frac{b}{2}$ es entero, por lo tanto ac es igual al cuadrado de un entero.

Ahora, exploremos los posibles valores de a y c dado b. Como a, b, c son enteros positivos, tenemos que los valores de a, c corresponden con las parejas de divisores de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, de forma que si $\{1, d_1, d_2, \dots, d_n\}$ son los divisores de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ en orden creciente, tenemos que los posibles valores son $\{a = 1, c = d_n\}, \{a = d_1, c = d_{n-1}\}, \dots, \{a = d_{n-1}, c = d_1\}, \{a = d_n, c = 1\}$. ¿Cuántas de estas parejas tenemos? Tantas como divisores de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. ¿Cuántos divisores tiene $\left(\frac{b}{2}\right)^2$? No hay forma de saberlo sin información adicional, sin embargo sí sabemos que la cantidad de divisores de un número cuadrado es impar.

Entonces, si hay tantas ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ (con b par y una única solución real) como divisores de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, y $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ tiene siempre una cantidad impar de divisores, concluimos que hay una cantidad impar de ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c$ que tienen una única solución real.

Inciso b

Primera forma (simple y bonita)

Utilizando la fórmula general con $b = 2k$, tenemos que $x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$. Como necesitamos que el determinante sea 0, tenemos que $k = \sqrt{ac}$, entonces $x = \frac{-\sqrt{ac}}{a} = -\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Al multiplicar todas las x obtenemos $-\sqrt{\frac{1 * d_1 * d_2 * \ldots * d_n}{d_n * d_{n-1} * \ldots * 2 * 1}}$ (ver inciso anterior). El producto de arriba se cancela con el de abajo y obtenemos que el producto es -1 (es importante notar que el signo se obtiene del hecho de que hay una cantidad impar de elementos de la forma $-\sqrt{\frac{c}{a}}$ que multiplicamos entre sí).

Segunda forma (simple pero asquerosa)

Utilizando la fórmula general, obtenemos que la solución de las ecuaciones descritas es de la forma $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a}$. Si denotamos al producto de las soluciones como P, tenemos que $P = \frac{(-b)^{\tau\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}}{2^{\tau\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)} \pi\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}$, donde $\tau(n)$ es la cantidad de divisores de n y $\pi(n)$ el producto de los divisores de n.

En este caso, sabemos que $\tau\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$ es un número impar, digamos $2q + 1$, y $\pi\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{\tau\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)}{2}} = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^{\frac{2q+1}{2}} = \left(\frac{b}{2}\right)^{2q+1}$. Sustituimos estos valores en P y obtenemos $P = \frac{(-b)^{2q+1}}{2^{2q+1}\left(\frac{b}{2}\right)^{2q+1}} = \left(\frac{-b}{\frac{2b}{2}}\right)^{2q+1} = (-1)^{2q+1} = -1$.

4. Después de ser engañado por Tezcatlipoca, Ozzy acabó en el año 1822. Por suerte encontró varios pasajes que le permiten viajar en el tiempo, estos tienen ciertas reglas:

- Cada pasaje une tres fechas separadas por 33 años. Por ejemplo existe el pasaje que une los años 1822, 1855 y 1888, este le permite viajar de 1822 a 1855, de 1822 a 1888 y de 1855 a 1888; también le permite viajar en sentido contrario (de 1855 a 1822, de 1888 a 1822 y de 1888 a 1855).

- Una vez que usa cierto pasaje para ir del año x al año y, no puede usar el mismo pasaje para ir del año x al año y, ni para ir del año y al año x.

- Al momento de usar un pasaje, todos los pasajes que existían antes que él, son destruidos. Es decir, si usa un pasaje que contenga como fecha mayor el año x, los pasajes que tengan todos sus años menores a x no podrán ser utilizados.

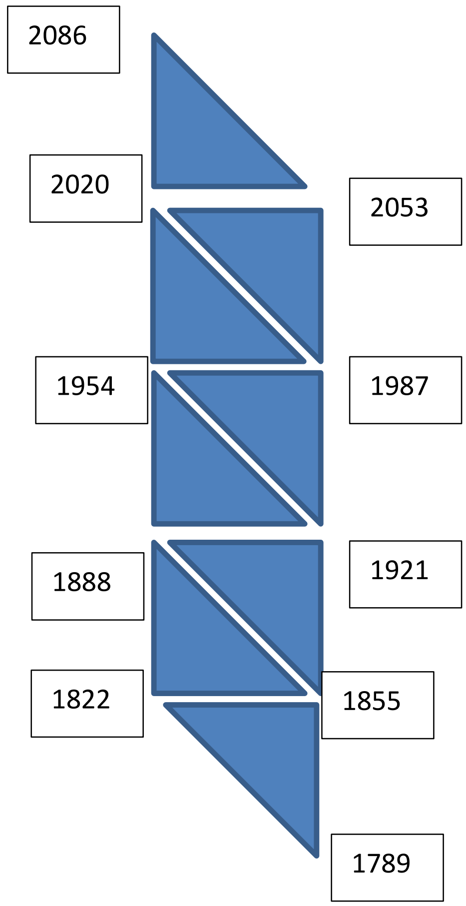
- La esperanza de vida de Ozzy no excede los 33 años y no quiere vivir en años anteriores al 2053 por miedo a crear alguna paradoja.

Si Ozzy quiere seguir vivo y viajar al año 2053 para evitar el apocalipsis y no quiere viajar antes de 1822 ni después del 2053, ¿de cuántas formas lo puede hacer?

NOTA: Si Ozzy usa pasajes diferentes para ir del año x al y, se consideran formas distintas.

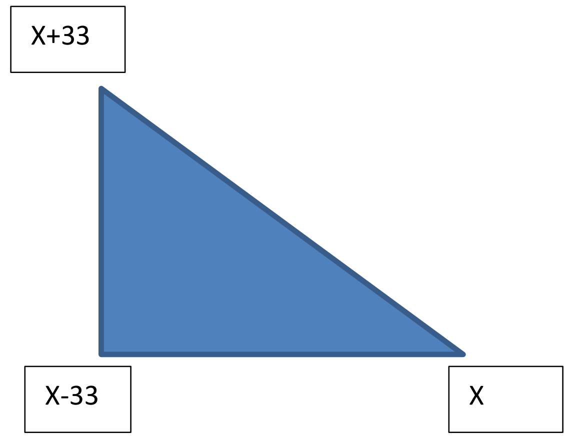
Solución

Organizando los pasajes



Ahora, el primer pasaje que Ozzy puede usar es el que une los años $\{1789, 1822\ y\ 1855\}$, pero como no puede ir antes de 1822, solo puede usar el pasaje para quedarse en el año 1822 o viajar a 1855. Entonces en el primer pasaje puede acabar en la fecha media (M) o en la fecha final (F). Al seguir avanzando en los pasajes también existirán 2 posibilidades, acabar en M o en F. Observando los siete primeros pasajes, existen 2^7 formas de recorrerlo (formar una palabra de 7 letras con $M´s$ y $F´s$) viendo únicamente en qué fecha acabará Ozzy dentro de los pasajes.

Viendo sólo un pasaje



Si Ozzy quiere seguir avanzando en los pasajes, no puede retroceder porque los anteriores ya no existen, tendrá que estar en el año X o en el año $X + 33$.

Si se encuentra en el año $X - 33$, puede llegar al año X de dos formas ($\{X - 33 \rightarrow X\}$ y $\{X - 33 \rightarrow X + 33 \rightarrow X\}$) y al año $X + 33$ de dos formas ($\{X - 33 \rightarrow X + 33\}$ y $\{X - 33 \rightarrow X \rightarrow X + 33\}$).

Si se encuentra en el año X puede llegar de tres formas al año X ($\{X\}$, $\{X \rightarrow X + 33 \rightarrow X - 33 \rightarrow X\}$ y $\{X \rightarrow X - 33 \rightarrow X + 33 \rightarrow X\}$) y al año $X + 33$ puede llegar de dos formas ($\{X \rightarrow X + 33\}$ y $\{X \rightarrow X - 33 \rightarrow X + 33\}$).

Así que si Ozzy hace el viaje desde F de un pasaje a M del siguiente pasaje, lo podrá hacer de 3 formas; los otros viajes los puede hacer de dos formas ($MM, MF\ y\ FF$). Teniendo en cuenta que para el primer pasaje sólo hay una forma de llegar a F o M y para el resto, si no son parte de FM, hay dos formas de llegar.

Contando cuántas palabras tienen 0 $FM's$, 8 palabras. Aquí hay $8 * 2^6$ formas de llegar hasta el final del último pasaje.

Contando cuántas palabras tienen 1 FM, 56 palabras. Aquí hay $56 * 2^5 * 3$ formas de llegar hasta el final del último pasaje.

Contando cuántas palabras tienen 2 $FM's$, 56 palabras. Aquí hay $56 * 2^4 * 3^2$ formas.

Contando cuántas palabras tienen 3 $FM's$, 8 palabra. Aquí hay $8 * 2^3 * 3^3$ formas.

Ahora, si en el último pasaje Ozzy acabó en M puede usar el pasaje $\{2020, 2053\ y\ 2086\}$ para viajar del 2020 al 2053.

Por lo tanto, Ozzy tiene $2^9 + (2^8)(3)(7) + (2^7)(3^2)(7) + (2^6)(3^3) = 2^6(8 + 84 + 126 + 27) = 15680$ formas para viajar de 1822 a 2053.