TEOREMA DE PITÁGORAS

Laura Soledad Casillas Serna

1. Teorema de Pitágoras

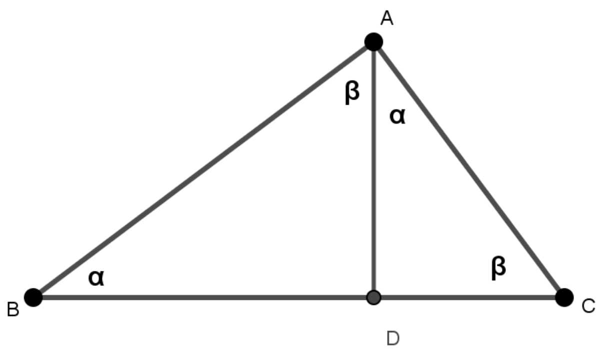
Existen varias demostraciones del teorema de Pitágoras, algunas opciones sólo muestran que el teorema se cumple, pero no se considera como una demostración. Aun así son una herramienta que permite darse cuenta lo que este teorema establece.

Aquí en este documento solo se proporcionará una sola de las diferentes demostraciones, pero puedes encontrar más en la revista Tzaloa año 2010, No.1, ésta la puedes buscar en la página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Teorema de Pitágoras: para un triángulo rectángulo "el cuadrado de la hipotensa es la suma de los cuadrados de los catetos".

Demostración:

Sea el triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en A. Se traza una altura desde el ángulo A como se muestra en la siguiente figura.



Sea D el pie de la altura trazada desde A. Al realizar este trazo el triángulo ABC se divide en dos. Sea $\angle ABC = \alpha$ y $\angle ACB = \beta$ y como la altura forma un ángulo recto entonces $\alpha + \beta = 90°$. Entonces los triángulos ABD y CAD son semejantes al triángulo ABC.

Utilizando el teorema de Tales para los triángulos ABD y CAD se tiene:

$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$. Quitando los denominadores queda de la siguiente manera:

$$AD^2 = BD \cdot DC \quad (1)$$

Se dice que AD^2 es la media proporcional o media geométrica de BD y DC.

De manera análoga para los triángulos ABD y ABC se tiene:

$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$ quitando también los denominadores queda:

$$AB^2 = BD \cdot BC \quad (2)$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} + & AB^2 = BD \cdot BC \\ & AC^2 = DC \cdot BC \end{array}$$

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC$$

Factorizando por factor común el segundo miembro de la ecuación:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC)$$

Como se puede ver en el triángulo rectángulo ABC, $BD + DC = BC$ y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BC)$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Que es lo que se quería demostrar.

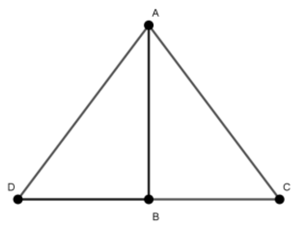
2. Recíproco del teorema de Pitágoras

Si en un triángulo el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.

Demostración:

Sea ABC un triángulo tal que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, se va a demostrar que el ángulo ABC es recto.

Trazando un segmento DB que mide los mismo que BC



Como el triángulo ABD es un triángulo rectángulo, tenemos que

$$AD^2 = AB^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 = AC^2$$

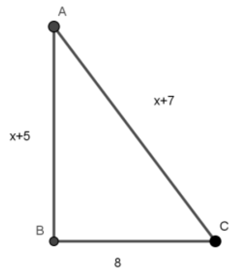
Es decir, $AD = AC$. Luego, los triángulos ABC y ABD son congruentes porque sus lados miden lo mismo. Esto implica que los ángulos $\angle ABC = \angle ABD$ y entonces el triángulo ABC es rectángulo.

Ejemplo:

En un triángulo rectángulo, las medidas de las longitudes de sus lados son 8, $x + 5$ y $x + 7$. Encuentra el valor del seno del mayor de los ángulos agudos del triángulo, si se sabe que $x > 3$.

Solución:

Es evidente que x+7>x+3, y si se sabe que x>3 entonces x+7>8, de esto se puede decir que entonces x+7 debe ser la hipotenusa del triángulo rectángulo porque es el lado de mayor longitud.



Aplicando el teorema de Pitágoras para determinar las longitudes de sus lados:

$$(x + 7)^2 = (8)^2 + (x + 5)^2$$

Resolviendo la ecuación resultante

$$x^2 + 14x + 49 = 64 + x^2 + 10x + 25 \rightarrow 4x = 40 \quad \rightarrow x = 10$$

Entonces la hipotenusa del triángulo es igual a 10+7=17

Y como se pide el valor de la función seno del mayor de los ángulos agudos, ese debe ser el ángulo C porque el cateto mayor es $BA = 15$,

$$senC = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{15}{17}$$

3. Datos de vital importancia

1. El famoso “Efecto mariposa” fue descubierto por el matemático Edward Lorenz.
   https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99
2. Gauss fue profesor de Bernhard Riemann y Julius Wilhelm Richard Dedekind, dos de los más grandes matemáticos del S. XIX.
   https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/

4. Un lema, una fórmula y una ley

Lema de la perpendicularidad

Los segmentos BC y AD son perpendiculares si y sólo si,

$$DB^2 - DC^2 = AB^2 - AC^2$$

Notemos que cuando decimos que los segmentos BC y AD son perpendiculares, existe la posibilidad de que estos no se corten, nos referiremos en tal caso a las rectas que tales segmentos determinan.

Fórmula de Herón

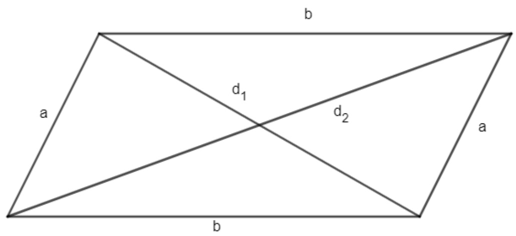
Sea ABC un triángulo con lados de longitud a, b y c. Si s es el semiperímetro del triángulo, entonces su área la podemos calcular como:

$$(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Ley del paralelogramo

La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados, es decir, si d_1 y d_2 son las diagonales y a, b los lados, entonces tenemos que

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Ejercicios:

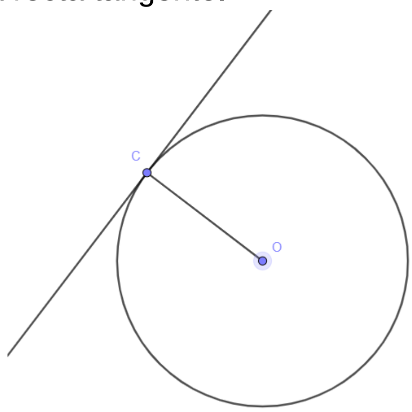
1. (Lema de la perpendicularidad)En un triángulo ABC, E es un punto sobre la altura AD. Pruebe que
$$AC^2 - CE^2 = AB^2 - EB^2$$
2. Demuestra la ley del Paralelogramo.

Puedes encontrar la demostración de la fórmula de Herón en la sección de vídeos.

5. Problemas

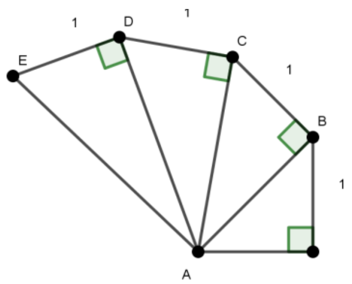
Un pequeño spoiler de los siguientes problemas, es probable que necesites usar:

- La fórmula general: Si se tiene una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- Si una recta es tangente a un círculo en un punto C, entonces el radio OC es perpendicular a la recta tangente.

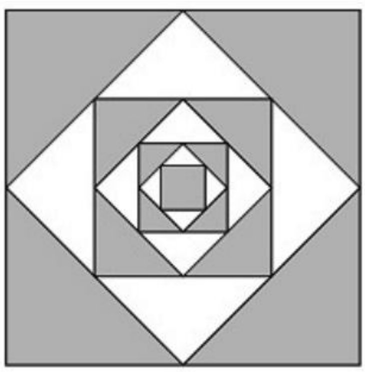


Pero no te preocupes, en los dos próximos materiales te quedará claro esto. Ahora sí, los problemas…

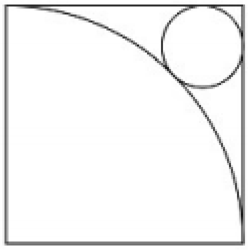
1. Considera un cuadrilátero ABCD tal que las longitudes de sus lados en cm son $AB = 3$, $BC = 4$. $CD = 5$ y $DA = 6$. Si $\angle ABC = 90°$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero?
2. Determina las longitudes de $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\ y\ \overline{AE}$. . La base del triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es AB es también igual a 1.



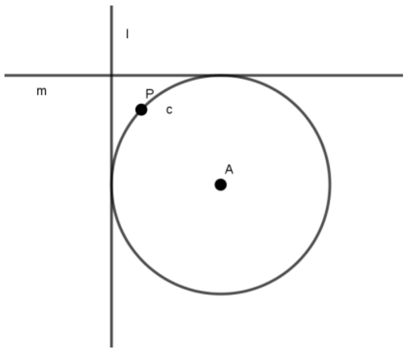
3. Si el lado del cuadrado más grande mide 4, ¿cuánto mide el área de la región sombreada?



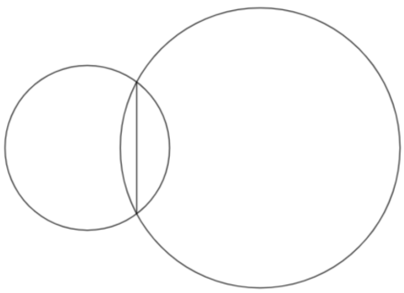
4. Un punto P está dentro de un cuadrado ABCD cuyos lados miden 16 cm. P equidista tanto de los dos vértices adyacentes A y B, como al lado CD. ¿Cuánto mide la distancia AP?
5. Un punto tomado sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo y situado a la misma distancia de los catetos divide a la hipotenusa en segmentos de medida 10 y 30. Halla la medida de los catetos.
6. En la siguiente figura un cuarto de círculo está inscrito en un cuadrado de lado 4. ¿Cuánto mide el radio del círculo menor que es tangente al cuarto de círculo y a dos lados del cuadrado?



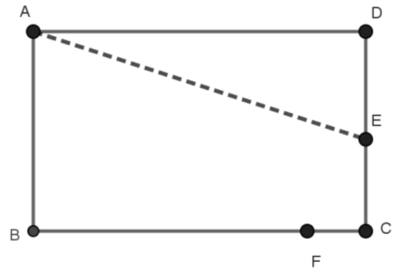
7. C_1 y C_2 son circunferencias concéntricas. Una cuerda AB de C_2, de longitud 18, es tangente a C_1. ¿Cuánto mide el área de la región entre C_1 y C_2?
8. En el siguiente dibujo la distancia del punto P a la recta l es de 9, y la distancia de P a la recta m es 8. Determina el radio de la circunferencia.



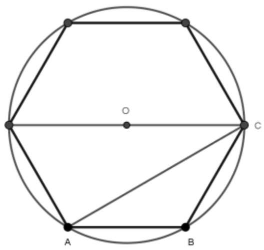
9. La longitud de la cuerda común a los dos círculos es 16 cm. Si los radios miden 10 cm y 17 cm, ¿cuánto mide la distancia entre los centros de los círculos?



10. E es un punto sobre el lado BC de un rectángulo $ABCD$ tal que, si se hace un doblez sobre AE, el vértice D coincide con un punto F sobre el lado CD. Si $AB = 16\ cm$ y $DE = 10\ cm$, ¿cuál es la longitud de AE?



11. Sean $ABCD$ un rectángulo con $AB < BC$ y M, N los puntos medios de los lados CD y DA, respectivamente. Si el ángulo BNM es recto y $AB = 6cm$, ¿cuánto mide BC?
12. A partir de un cuadrado se forma un octágono regular cortando un triángulo rectángulo isósceles de cada esquina. Si cada lado del cuadrado mide 20 cm, ¿cuánto mide cada lado del octágono?
13. Dos esferas de jabón encimadas, cuyos centros están separados por 50 mm y cuyos radios miden 40 mm y 30 mm respectivamente, se interceptan y su intersección forma un círculo. ¿Cuánto mide el radio de este círculo?
14. Si el área del círculo es 1 cm^2, ¿cuánto mide el área del triángulo ABC?



6. Vídeos

Varias demostraciones del teorema de Pitágoras

https://www.youtube.com/watch?v=1ZoMMaJun5s

Demostración de la fórmula de Herón

https://www.youtube.com/watch?v=6c_VZQhIwCk

Pequeña introducción a trigonometría

https://www.youtube.com/watch?v=uMPx37LRI2E