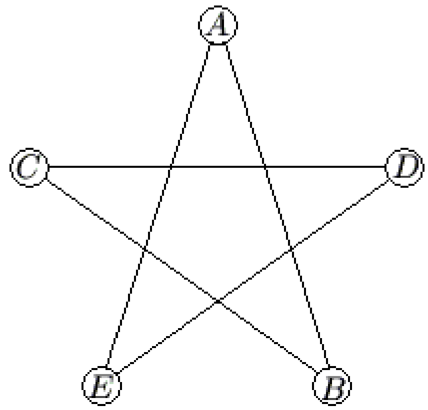
PROBLEMAS: ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Daniel Tzoali Arroyo Valdivia
Ricardo Antonio Gutiérrez Esparza

1. Álgebra

1. Resuelve la ecuación $|x-3|^{(x^2-8x+15)/(x+2)}=1$
2. Resuelve $9+x^{-4}=10x^{-2}$
3. Encuentra el producto de los primeros 20 términos de 3, 9, 27, 81
4. [2006 AMC 12A] Algunos aros de 1 cm de grosor cuelgan del techo. El primer aro tiene un diámetro exterior de 20 cm. El diámetro exterior de cada aro es 1 cm menor que el anterior. El último aro tiene un diámetro exterior de 3 cm. ¿Cuál es la distancia, en cm, de la parte superior del primer aro a la parte inferior del último aro?

5. [2005 AMC 10A] En la estrella mostrada, las letras A, B, C, D y E son reemplazadas por los números 3, 5, 6, 7 y 9, no necesariamente en ese orden. La suma de los números en los extremos de los segmentos AB, BC, CD, DE, and EA forman una secuencia aritmética, aunque no en ese orden. ¿Cuál es el término medio de la secuencia aritmética?



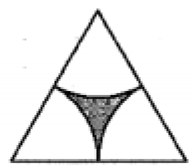
6. [2011 AIME II] La suma de los primeros 2011 términos de una secuencia geométrica es 200. La suma de los primeros 4022 términos es 380. Encuentra la suma de los primeros 6033 términos.
7. [2004 AMC 12A] Una secuencia de tres números reales forma una progresión aritmética cuyo primer término es 9. Si se suma 2 al segundo término y 20 al tercero se obtiene una progresión geométrica. ¿Cuál es el menor valor del tercer término de la progresión geométrica?
8. [2012 AMC 10A] Sean a, b, c enteros positivos con $a \geq b \geq c$ de tal forma que $a^2 - b^2 - c^2 + ab = 2011$ y $a^2 + 3b^3 + 3c^2 - 3ab - 2ac - 2bc = -1997$. ¿Cuánto vale a?
9. Dado $a + b + c = 0$, demuestre que $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} = abc$
10. [2000 AMC 12] Se escogen dos números primos distintos entre 4 y 18. Cuando su suma se substrae de su producto, ¿qué valor es posible obtener, 22, 60, 119, 180 o 231?
11. [2002 AMC 12B] La media aritmética de los números del conjunto $\{\{1, 11, \dots, 111111111\}$ es un número M de 9 dígitos, todos distintos. ¿Cuál es el único dígito que no contiene M?
12. [2007 iTest] Encuentra $a + b$ si a y b satisfacen $3a + 7b = 1977$ y $5a + b = 2007$.
13. [2017 AMC 10B] Suponga que x, y son reales diferentes de 0 tales que $\frac{3x+y}{x-3y} = -2$. ¿Cuál es el valor de $\frac{x+3y}{3x-y}$?
14. Encuentra todas las parejas (x, y) de enteros tales que $x^3 + y^3 = (x + y)^2$
15. Resuelve $3^x + 4^y = 5^z$ en enteros no negativos.

2. Datos de vital importancia

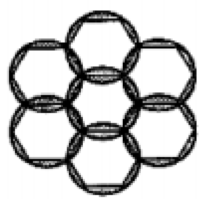
1. Gauss estuvo a punto de morir cuando tenía tres o cuatro años, al caer dentro de un canal cercano a su casa. Fue salvado de ahogarse por un campesino que pasaba casualmente.
   https://eljaya.com/99548/recordando-al-principe-de-la-matematica-carl-friedrich-gauss-en-el-243-aniversario-de-su-nacimiento/
2. Los babilonios fueron los primeros en usar las fracciones como las usamos hoy día.
   https://elibro.net/es/ereader/uaa/51972?page=99

3. Geometría

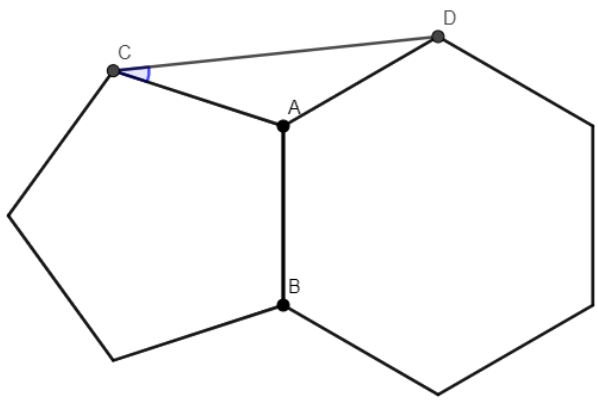
1. Calcula el área sombreada de la siguiente figura donde el triángulo es equilátero de lado igual a 2 y los círculos tienen radio 1.



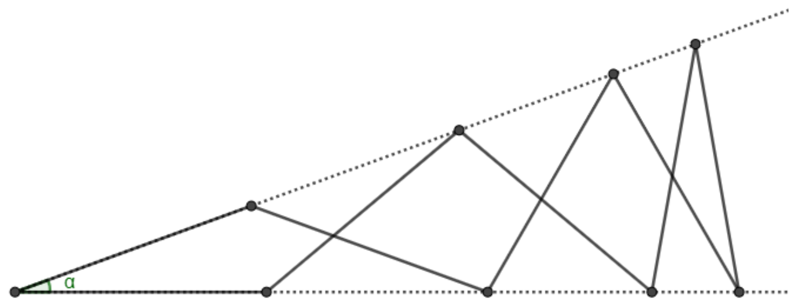
2. En la siguiente figura los hexágonos son regulares de lado 1. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



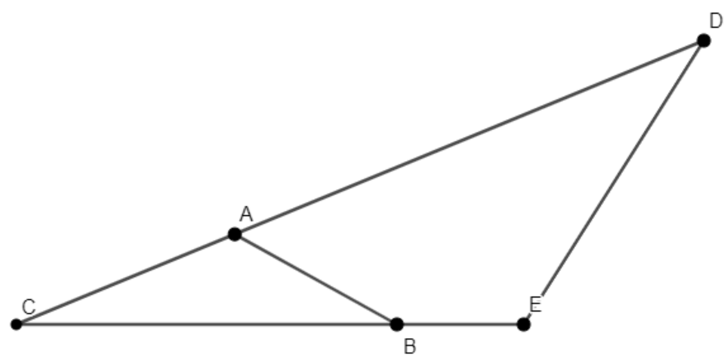
3. [ONMAPS Jal., 2011] Sean un pentágono regular y un hexágono regular con un lado en común AB. Se traza el segmento que une los vértices C y D como en la figura. Calcule, en grados, el ángulo $\angle ACD$.



4. Un pantógrafo articulado formado por 9 pedazos está en la siguiente posición. ¿Cuánto vale el ángulo α si cada segmento de recta es de la misma longitud?



5. Para el problema anterior, ¿cuál sería el valor de α si el pantógrafo estuviera formado por $2n+1$ pedazos, con $n \geq 1$?
6. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$, sea H la altura desde A hasta BC, demuestra que:
   a. $BH \cdot HC = AH^2$
   b. $BH \cdot BC = AC^2$
7. Sea ABC un triángulo con alturas AD y BE. AD y BE se intersectan en H. Sea F el punto medio de AH, G el punto medio de AB y K el punto medio de BC. Demuestra que el ángulo FGK es de 90°.
8. Demuestra que la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de las bases.
9. En un triángulo ABC, sea M el punto medio de BC. Prolongamos AM más allá del punto M y tomamos un punto N de tal manera que AN es el doble de AM. Demuestra que el cuadrilátero $ABNC$ es paralelogramo.
10. Demuestra que el segmento de línea que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero, bisecta el segmento de línea que une los puntos medios de las diagonales.
11. En la siguiente figura, el área del triángulo ABC es 3 cm^2. Si $CA = 4\ cm, AD = 8\ cm, CB = 6\ cm$ y $BE = 2\ cm$, ¿cuál es el área del triángulo CDE?



12. En el triángulo ABC sabemos que el ángulo CBA es el doble del ángulo BCA, el lado CA es 2 unidades mayor que el lado AB y BC mide 5. ¿Cuánto miden AB y CA?

13. Demuestra el Teorema del Ángulo Común. Sea ABC un triángulo cualquiera con M y N dos puntos arbitrarios sobre AB y AC, respectivamente. Entonces $\frac{(AMN)}{(ABC)} = \frac{AM}{AB} * \frac{AN}{AC}$.
14. [OMM Tamps, 2010] Sea $ABCD$ un cuadrado con lado 1 cm. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC, respectivamente, y sea P el punto de intersección de DN y CM. Calcule, en cm^2, el área del triángulo CPN.
15. Dentro del paralelogramo $ABCD$ se considera un punto P tal que $PC = BC$. Demuestra que la recta BP es perpendicular a la recta que conecta los puntos medios de los segmentos AP y CD.