MANIPULACIONES ALGEBRAICAS

Ricardo Antonio Gutiérrez Esparza
Contacto: 0226154@up.edu.mx

1. Productos Notables

En materiales anteriores, aprendiste a hacer multiplicaciones de polinomios (ver Preálgebra y Distributiva). Como probablemente ya te diste cuenta (y si no, te falta más práctica) hacer este tipo de operaciones es un paso muy importante en la solución de muchos de los problemas de la Olimpiada, incluso en problemas que no son del área de Álgebra. Algunas de estas operaciones aparecerán con frecuencia, y para hacernos la vida más simple, vale la pena distinguir y dar un nombre especial a algunos de estos productos.

De esta manera, bautizamos como **producto notable** a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. Existen varios tipos de productos notables. A continuación, se enlistan los más importantes.

Nombre	Operación	Descripción
Factor común	$c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$	El resultado de multiplicar un binomio $a+b$ por un término c aplicando la propiedad distributiva.
Cuadrado de un binomio	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Multiplicar por sí mismo un binomio (dos términos). Se suman los cuadrados de cada término y se suma o se resta el doble producto de ambos.
Binomios conjugados	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	Cuando se tienen los mismos dos términos, pero donde en uno se aplica la operación suma y en el otro la operación resta. Se

		elevan al cuadrado y se restan.
Cuadrado de un trinomio	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$	De forma similar al binomio al cuadrado, se suman los cuadrados de los términos y el doble de la suma de todas las posibles parejas. Esto es extensivo para más de tres términos
Cubo de un binomio	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	Una fórmula similar al binomio al cubo es un caso más del Binomio de Newton.
Suma y diferencia de cubos	**Adición de cubos:** $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ **Diferencia de cubos:** $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	Una identidad que se ve más como un método de factorización, sin embargo, es también interesante verla como producto notable. Se puede generalizar.

Son muchos, ¿no crees? En realidad hay más, pero estos son los más importantes. ¿Te los tienes que aprender de memoria? No necesariamente, siempre puedes hacer la operación como si fuera cualquier otro producto de polinomios, sin embargo sí te facilita la vida saberlos. De cualquier forma son operaciones tan comunes que terminarás por aprendértelos. ¿No me crees? Vamos a practicar.

Ejercicios

1. Calcula los siguientes productos notables
   a. $(1-2x)^2$
   b. $(1-x-x^2)^2$
   c. $(x+y-1)(x-y-1)$
   d. $(a+b+c)^2$
   e. $(x-1)(x+1)(x^2+2)$
   f. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
2. Escribe el polinomio $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2$ de forma reducida

2. Factorización

De forma similar a lo que vimos en los productos notables, la factorización nos sirve para clasificar algunos tipos de operaciones algebraicas que son recurrentes en los concursos de matemáticas.

Una forma retórica de pensar en la factorización es como el proceso contrario de un producto notable. Cuando hablamos de **factorizar** estamos hablando de escribir una expresión como factores, es decir, como el producto de un conjunto de polinomios y/o monomios. De esta forma, podemos decir que al factorizar "reducimos" a multiplicaciones, mientras que al emplear los productos notables "expandimos" al efectuar dichas multiplicaciones.

Ahí te va la tabla de factorizaciones comunes.

Nombre	Operación o ejemplo	Descripción
Factor común	$6x^3y^2 + 8x^4y^3 - 10x^5y^3 = (2x^3y^2)(3) + (2x^3y^2)(4xy) + (2x^3y^2)(-5x^2y) = (2x^3y^2)(3 + 4xy - 5x^2y)$.	Se tiene que encontrar el monomio que es el máximo común divisor de los términos y factorizarlo aplicando la ley distributiva.
Factor común por agrupación de términos	$4x^2 + 20x + 3xy + 15y$: 1. Agrupar los términos similares, $(4x^2 + 20x) + (3xy + 15y)$, 2. Factorizar por el máximo común divisor en cada agrupación, $4x(x + 5) + 3y(x + 5)$, 3. Nuevamente factorizar el factor común del binomio, $(x + 5)(4x + 3y)$.	Se realiza mediante la colocación de los términos en el polinomio en dos o más grupos, donde cada grupo se puede factorizar mediante un método conocido. Los resultados de estas factorizaciones parciales se pueden combinar a veces para dar una factorización

		de la expresión original
Trinomio cuadrado perfecto	$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$ $$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$	Similar a su producto notable, se trata de reducir del trinomio al binomio. Se tiene que cumplir que los extremos sean cuadrados
Diferencia de cuadrados	$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$	Cuando se tienen dos cuadrados restándose, se puede hacer la factorización con sus binomios conjugados.
Binomio al cubo	$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$ $$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$	Una fórmula similar al binomio al cubo es un caso más del Binomio de Newton.
Suma y diferencia de cubos	**Adición de cubos:** $$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$ **Diferencia de cubos:** $$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$	La suma y diferencia de cubos se puede factorizar con dicha expresión, además que se puede generalizar.
Suma y diferencia de potencias enésimas	**Suma de potencias enésimas:** **Si –sólo si–** *n* es impar, $$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$$ **Diferencia de potencias enésimas:** $$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$$	Es la generalización de la suma y diferencia de cubos.

Simon's Favorite Factoring Trick	$$xy + xk + yj + jk = (x + j)(y + k)$$ Ejemplo: $$xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$$	Un caso especial de la factorización por agrupación de términos, es relevante pues pese a su simplicidad, no resulta tan intuitivo.

Si eres muy observador, posiblemente de diste cuenta de que la tabla de productos notables es casi la misma que ésta, únicamente cambiamos el nombre de las cosas y el orden de las operaciones (y añadimos unas cuantas de más).

A diferencia de los productos notables, factorizar no siempre resulta muy intuitivo, por lo que te recomendamos ampliamente que practiques lo suficiente. Ahí te van algunos para empezar, pero si quieres más ejercicios de este tipo, no dudes en contactar al escritor de este material.

Ejercicios

Factoriza hasta su mínima expresión

a. $x + 2\sqrt{2xy} + 2y$
b. $m^{4a+8} - 25$
c. $a^3 - 125$
d. $a^2(a^2 - b^2) - (2a - 1)(a^2 - b^2)$
e. $p^3t^3 + mn^2p^2t + m^2npt^2 + m^3n^3$
f. $2a + 3b^2 + 6 + ab^2$

3. Datos de vital importancia

Ahí te van unos datos para que descanses unos segundos.

1. La media aritmética de las frecuencias más alta y más baja de una octava (el do del inicio y el del final) se es la frecuencia de la nota sol. https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf
2. El ocelote se estudia en la región de Los Chimalapas, en el este de Oaxaca. En esta región se pueden encontrar 5 de las 6 especies de felinos que se pueden encontrar en México: margay, yaguarundí, puma, jaguar y ocelote (la otra especie es el lince). https://www.biodiversidad.gob.mx/Biodiversitas/Articulos/biodiv118art1.pdf

4. Manipulaciones Algebraicas

Este tema puede sonar aterrador, pero en realidad no lo es. Una manipulación algebraica no es otra cosa que aplicar una serie de operaciones algebraicas para resolver un problema. En general, podemos distinguir 4 tipos de operaciones o herramientas que son útiles para hacer una manipulación algebraica exitosa:

1. Operaciones con polinomios (ver Preálgebra y Distributiva)
2. Productos notables (mencionado en este material)
3. Factorización (mencionado en este material)
4. Solución de ecuaciones (ver Ecuaciones Lineales)

No hay una regla general para resolver este tipo de problemas, en algunos habrá que resolver sistemas de ecuaciones, en otros tendremos que factorizar de formas creativas, en otros habrá que hacer ambos o aplicar otras de las herramientas. Sin embargo, es necesario practicar las cuatro herramientas mencionadas con anterioridad, y recordar que la creatividad a la hora de resolver los problemas es tu mejor aliada.

Anexo: Manipulaciones Chidas (y complicadas)

Los productos notables y factorizaciones que se presentan a continuación no son muy comunes, pero podrían llegar a serte útiles (sobre todo en problemas de más alto nivel).

No pasa nada si no te los aprendes, se puede llegar a ellos con los métodos descritos anteriormente.

20 **Preliminares**

Ejercicio 1.22 *Para todos los números reales x, y, se tienen las siguientes identidades de segundo grado:*

(i) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (x-y)^2 + 2xy$.

(ii) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$.

(iii) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$.

(iv) $x^2 + y^2 + xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x+y)^2}{2}$.

(v) $x^2 + y^2 - xy = \dfrac{x^2 + y^2 + (x-y)^2}{2}$.

(vi) *Muestre que* $x^2 + y^2 + xy \geq 0$ *y* $x^2 + y^2 - xy \geq 0$.

Ejercicio 1.23 *Para todos los números reales x, y, z, se tiene:*

(i) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = \dfrac{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2}{2}$.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \dfrac{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}{2}$.

(iii) *Muestre que* $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 0$ *y* $x^2+y^2+x^2-xy-yz-zx \geq 0$.

Ejercicio 1.24 *Para todos los números reales x, y, z se tienen las siguientes identidades:*

(i) $(xy+yz+zx)(x+y+z) = (x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz$.

(ii) $(x+y)(y+z)(z+x) = (x^2y+y^2z+z^2x)+(xy^2+yz^2+zx^2)+2xyz$.

(iii) $(xy+yz+zx)(x+y+z) = (x+y)(y+z)(z+x)+xyz$.

(iv) $(x-y)(y-z)(z-x) = (xy^2+yz^2+zx^2)-(x^2y+y^2z+z^2x)$.

(v) $(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz = 2z(x-y)^2+(x+y)(x-z)(y-z)$.

(vi) $xy^2+yz^2+zx^2-3xyz = z(x-y)^2+y(x-z)(y-z)$.

Ejercicio 1.25 *Para todos los números reales x, y, z se tiene:*

(i) $x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)$.

(ii) $xy+yz+zx-(x^2+y^2+z^2) = (x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)$
$+(z-x)(x-y)$.

Ejercicio 1.26 *Para todos los números reales x, y, z se tiene,*

$$\begin{aligned}(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 &= 2\,[(x-y)(x-z)\\ &\quad +(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)]\,.\end{aligned}$$

5. Problemas

1. [Math League HS 2001-2002] Si $a+b+c+d=2001$ y $b+d=2002$, ¿cuál es el valor de $a-b+c-d$?
2. Supón que m y n son números reales, de tal forma que $m+n=15$ y $mn=20$. ¿Cuánto vale $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$?
3. [AMC 10A 2012] La suma de tres números enteros tomados por parejas son 12, 17 y 19. Si ordenamos los números de menor a mayor, ¿cuál es el valor del medio?
4. Suponga que x es un número real tal que $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2020}$. ¿Cuánto vale $x^2+\frac{1}{x^2}$?
5. [iTest 2008] Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$2x+3y+3z=8$$

$$3x+2y+3z=808$$

$$3x+3y+2z=80808$$

   Encuentra el valor de $x+y+z$

6. Si a,b son números realies tales que $a+b=7$ y $ab=5$, ¿cuánto vale a^3+b^3?
7. [MAO 1990] En un sólido rectangular, el área de la cara de arriba es 135, el área de la cara frontal es 30, y el área de la cara de la derecha es de 50. Encuentra el volumen del sólido.

8. Sean x, y números reales tales que

$$x - y = 2\sqrt{3}$$

$$x + y = 3\sqrt{2}$$

Encuentra $(x^2 - y^2)^2$

9. [MAO 1990] Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, encuentra $a^4 + b^4$
10. [AIME 1986] Determina $3x_4 + 2x_5$ si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 24 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 48 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 96 \end{aligned}$$

(Sugerencia: No trates de resolver todo el sistema de ecuaciones, si bien podrías hacerlo te va a llevar mucho tiempo)
11. Si $x^2 + y^2 = 6xy$ y $x > y > 0$, determina $\frac{x+y}{x-y}$
12. Suponga que p, q son número reales tales que $p + q = 6$ y $p^{-1} + q^{-1} = \frac{3}{2}$. ¿Cuánto es $p^2 + q^2$?
13. [AHSME 1987] Si (x, y) es una solución del sistema

$$xy = 6$$
$$x^2y + xy^2 + x + y = 63$$

Encuentra $x^2 + y^2$

14. [AoPS] Encuentra todos los valores posibles de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ sabiendo que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$
15. [AIME 2015] Existe un número primo p tal que $16p + 1$ es el cubo de un entero positivo. Encuentra p. (Sugerencia: Usa $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$)
16. [M&IQ 1992] Resuelve es sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (x + y)(x + y + z) &= 66 \\ (y + z)(x + y + z) &= 99 \\ (z + x)(x + y + z) &= 77 \end{aligned}$$

17. [Purple Comet MS 2013] Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 989$ y $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = 2013$. Encuentra $a + b + c$.
18. [AIME 2013] Sea $ABCD$ un cuadrado, y sean E y F puntos en AB y BC, respectivamente. La paralela a BC trazada por E y la paralela a AB trazada por F dividen a $ABCD$ en dos cuadrados y dos rectángulos (no cuadrados).

La suma de las áreas de los dos cuadrados es $\frac{9}{10}$ del área de cuadrado $ABCD$. Encuentra $\frac{AE}{EB} + \frac{EB}{AE}$.

19. [MAO 1990] Si $a^3 - b^3 = 24$ y $a - b = 2$, encuentra todos los valores posibles de $a + b$.
20. (BMO, Ronda 2, 2005) Si N es un entero positivo y hay exactamente 2005 pares ordenados (x, y) de enteros positivos que satisfacen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$

Prueba que N es un cuadrado perfecto.

6. Vídeos

- Algunos productos notables: https://www.youtube.com/watch?v=TsBWIp2-1fg
- Algunas técnicas de factorización: https://www.youtube.com/watch?v=ROGt8u81FxM

Problemas resueltos que son muy interesantes (**Altamente recomendado intentarlos antes de ver la solución**)

- Mágica simplificación (inglés): https://www.youtube.com/watch?v=9qYukRVbO6Q
- Ejemplo de aplicación del Simmon’s Favorite Factoring Trick (inglés): https://www.youtube.com/watch?v=0nN3H7w2LnI