34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

INTRODUCCIÓN AL CONTEO
2DA PARTE

Juan Carlos Martín Coronado

---

1. Recapitulando

La "clase" pasada se mencionaron los números factoriales y la forma de calcular la cantidad de conjuntos con k elementos que se pueden formar a partir de n elementos. Estos conceptos son sumamente importantes en combinatoria, por lo que los revisaremos una última vez. Empecemos por un problema pequeñito:

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en 5 sillas numeradas del 1 al 5?

En este caso, la primera persona se puede sentar en cualquiera de los 5 asientos, la segunda en 4 (los desocupados), la tercera en 3, la cuarta en 2 y la quinta solamente en 1 (el que le dejaron). O, visto de otra forma, en la silla 1 se puede sentar cualquiera de 5 personas, en la silla 2 cualquiera de 4 (los que no se sentaron en la 1), en la 3 cualquiera de 3, en la 4 cualquiera de 2 y en la 5 solamente 1 persona. La verdad da igual si tomamos la perspectiva de la silla o de la persona en este caso, pues todas las personas se sentarán y todas las sillas serán ocupadas, habiendo $5*4*3*2*1=120$ formas de que se sienten.

No es nada inusual encontrarse con problemas de combinatoria como este, en que multiplicamos un número natural por todos los anteriores a este, hasta el 1. Y como la verdad es una lata escribir cosas como $33*32*31*30*29*28*27*26*25*24*23*22*21*20*19*18*17*16*15*14*13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1$, por no hablar de números más grandes, se adquirió la nomenclatura $n!=n(n-1)(n-2)\dots(1)$. Así por ejemplo, $6!=6*5*4*3*2*1$. Por convención, $0!=1$.

2. Permutaciones y combinaciones

De manera un poco más general, el número P_n de formas distintas en que se pueden ordenar n objetos es n! y cada una de las listas ordenadas que se forman con los n objetos se llama "permutación". Así, ABCD y DBAC son permutaciones del conjunto {A,B,C,D}.

Ahora bien, algunas veces no tenemos que ordenar todo los objetos. Por ejemplo, digamos que no queremos acomodar a las 5 personas en las 5 sillas, sino solo a 3 personas de las 5 en las 3 primeras sillas. Aquí, multiplicamos $5*4*3=60$, que es lo mismo que $\frac{5*4*3*2*1}{2*1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$. En general, las listas ordenadas de k elementos tomados de un grupo de n elementos son $n(n-1) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Un último supuesto sería que las sillas no estuvieran numeradas, en cuyo caso no podríamos distinguir en qué silla sentamos a cada persona, sino solamente al conjunto de personas que sentamos. Suponiendo que sentemos a 3 personas, tenemos $\frac{5!}{(5-3)!}$ formas de sentarlas ordenadamente. Sin embargo, no nos interesa el orden, sino solo el grupo de personas. Cada grupo de 3 personas lo podemos sentar de 3*2*1 formas ordenadas, así que en esas $\frac{5!}{(5-3)!}$ estamos contando cada conjunto de 3 personas 3! veces. Dividimos las formas ordenadas entre las formas ordenadas que hay por cada conjunto y tenemos que hay $\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ grupos distintos de 3 personas que se pueden escoger entre 5 personas.

En una forma más general, el número de conjuntos de k elementos que se pueden escoger de entre n elementos es $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ y se suele denotar por $\binom{n}{k}$.

Una propiedad interesante de $\binom{n}{k}$ es que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, esto lo podemos ver de una manera sencilla, si abordamos el problema de calcular el número de conjuntos de k objetos escogidos de un conjunto de n de una manera distinta. Esto es, dividiendo en dos casos: cuando el objeto x forma parte del conjunto y cuando no. En el primer caso, ya escogimos uno de los k elementos que necesitamos, así que solamente tenemos que escoger k-1 elementos entre los n-1 objetos que no son x. Tras analizar este caso, obtendremos una expresión equivalente a $\binom{n-1}{k-1}$. En el segundo caso, tenemos que escoger los k elementos entre los n-1 que no son x, obteniendo una expresión equivalente a $\binom{n-1}{k}$. Los conjuntos de k elementos escogidos de n son tanto los del primer como los del segundo caso, así que sumamos ambos. Así, el número de posibles conjuntos de k elementos escogidos de entre n ($\binom{n}{k}$) es $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Esta propiedad se redacta comúnmente como $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ y es la que se usa en el triángulo de Pascal:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

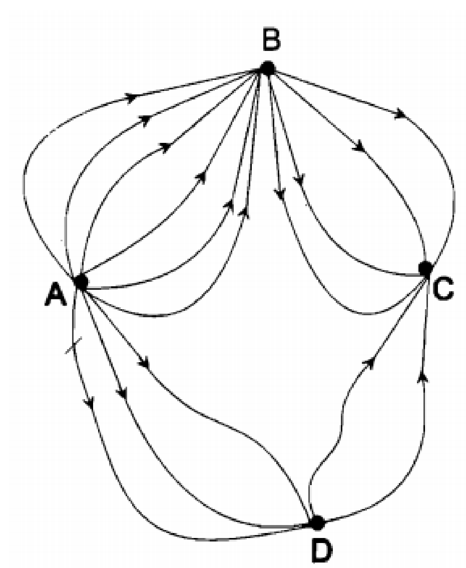
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

En el cual, en el renglón n aparecen los n+1 números $\binom{n}{0}, \binom{n}{1} \dots \binom{n}{n}$ (se empieza en el renglón 0) y se puede formar el siguiente renglón al anotar la suma de cada par de números abajo del espacio entre ellos, agregando un 1 al principio y otro al final del renglón.

Otra forma de verlo, es que la propiedad $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ nos está diciendo que si sumas dos números consecutivos del mismo renglón del triángulo de Pascal, está será igual al número que aparezca en el renglón inferior entre la pareja de números que se hayan tomado.

Dividir en casos suele ser más útil e intuitivo que en esta demostración de la propiedad. Por ejemplo, en el problema de definir los caminos desde la ciudad A hasta la ciudad C.



Aquí, sería un poco tardado contar los caminos de uno en uno. Sin embargo, podemos darnos cuenta de que todos los caminos pasan por B o por D, por lo que dividimos los caminos en los que pasan por B y los que pasan por D. Los caminos que pasan por B son 24, pues hay 6 caminos que van de A hasta B y 4 que van de B a C. Los caminos que pasan por D son 6, pues hay 3 caminos de A hasta D y 2 de D hasta C. Sumando los caminos que pasan por B y los que pasan por D tenemos el total de caminos de A hasta C, 30.

3. Ejercicios

1. Explica porqué $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Elabora los primeros 12 renglones del triángulo de Pascal.

4. Datos de vital importancia

Si quieres un pequeño descanso, revisa los siguientes datos de vital importancia (TIENES PROHÍBIDO REVISAR LAS LIGAS ANTES DE ACABAR DE LEER EL MATERIAL):

1. A Pitágoras se le atribuye la palabra filosofía, al decir “No soy sabio, sino amante de la sabiduría (filósofo)”. También se le atribuye la palabra matemática (lo que se aprende). https://www.eluniversal.com/doblevia/31121/pitagoras-mucho-mas-que-un-teorema
2. Los mayas desarrollaron el concepto de cero de manera independiente. http://oncetv-ipn.net/sacbe/mundo/los_mayas_y_los_numeros/cero.html
3. Claudio Ptolomeo no solo destacó por su Almagesto astronómico, sino también por la Harmonica, un tratado de teoría musical donde proponía que las notas musicales podían ser traducidas a proporciones matemáticas y viceversa. Esto le llevó a la noción de la música de las esferas, el sonido de los planetas en movimiento. https://www.revistaciencias.unam.mx/en/102-revistas/revista-ciencias-100/714-la-musica-de-las-esferas-taditio-y-canon-astronomico-musical-de-kepler.html

5. Problemas

Recuerda hacer el procedimiento para todos estos problemas.

1. Hay 5 diferentes tazas de té, 3 platillos y 4 cucharillas en la tienda “Fiesta de té”. ¿Cuántas maneras hay de comprar 2 artículos de distinto tipo?
2. Dos coleccionistas tienen 20 timbres y 10 tarjetas postales cada uno. Un intercambio es *justo* si se cambia un timbre por otro o una postal por una postal. ¿Cuántos intercambios *justos* diferentes pueden hacer los coleccionistas entre ellos?
3. El alfabeto hermético consta solamente de las letras A, B y C. Las palabras herméticas son una secuencia arbitraria de no más de 4 letras. ¿Cuántas palabras tiene el idioma hermético?

4. Ricky y Tzoali juegan “piedra, papel o tijeras” varias veces. Juegan hasta que uno de ellos acumule 5 victorias o pasen 13 juegos sin que ninguno lo logre. ¿Cuántos posibles torneos pueden vivir?
5. Los números de 7 cifras sin dígitos 1, ¿son más de la mitad de los números de 7 cifras?
6. Hay tres cuartos en un dormitorio: uno sencillo, uno doble y uno para cuatro estudiantes. ¿De cuántas formas se pueden acomodar 7 estudiantes en este dormitorio?
7. De un grupo de 2 camellos, 3 cabras y 10 ovejas, ¿de cuántas formas podemos escoger un comité de 6 animales si…
    a. no hay distinción de especies?
    b. se debe incluir a los dos camellos?
    c. ninguno de los camellos debe formar parte?
    d. debe haber al menos 3 ovejas?
    e. debe haber a lo más 2 ovejas?
    f. el camello Joe, la cabra Billy y el carnero Samuel se odian mutuamente y no pueden estar juntos?
8. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de SECRETO sin que dos letras idénticas se encuentren juntas?
9. En un estante hay 5 libros en alemán, 7 en español y 8 en francés. Cada libro es distinto de los otros.
    a. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar?
    b. ¿De cuántas formas podemos acomodarlos si ponemos los libros en el mismo idioma uno al lado del otro?
    c. ¿De cuántas formas podemos ordenarlos con los libros en francés unos al lado del otro?
    d. ¿De cuántas formas podemos ordenar los libros sin que dos libros en francés se encuentren uno al lado del otro?
10. ¿Cuántas manos de dominó tienen al menos 2 *mulas*?

6. Vídeos

Diferencia entre permutaciones y combinaciones

https://www.youtube.com/watch?v=DhOeAPRXGxM

Ejemplo de permutaciones

https://www.youtube.com/watch?v=wiWfXlJQFBw

Ejemplo de combinaciones

https://www.youtube.com/watch?v=cb_NZMvYfag

Cuándo usar permutaciones o combinaciones

https://www.youtube.com/watch?v=Fy1niBXOgGY