ÁREA DE POLÍGONOS

34 Olimpiada Mexicana de MATEMÁTICAS Aguascalientes 2020

Daniel Tzoali Arroyo Valdivia
Daniela Maribel Trancoso Cervantes

1. Rectángulos

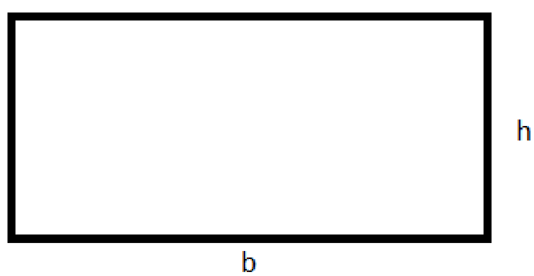
A lo largo de este material y en otros textos podrás encontrarte que el área de una figura se representa dentro de paréntesis.

$$(ABC) = \acute{a}rea\ de\ un\ tri\acute{a}ngulo\ con\ vertices\ ABC.$$

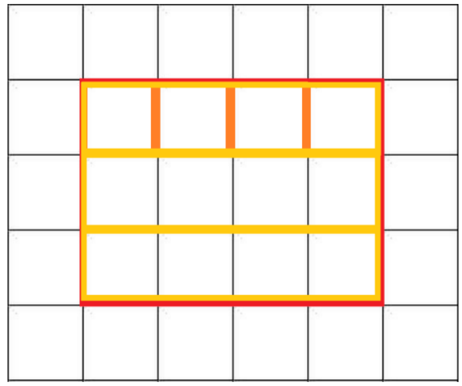
Es bien sabido que el área de una figura plana es el tamaño de la superficie que esta ocupa, y el perímetro es la longitud total que rodea a la figura.

Ya que el *perímetro* es la distancia alrededor de una figura, **podemos encontrar el perímetro de un rectángulo o un cuadrado sumando las longitudes de sus cuatro lados.** Un rectángulo es una figura geométrica con cuatro lados de dos longitudes distintas, los lados opuestos y paralelos tienen la misma longitud, es por ello que el perímetro de esta figura puede obtenerse de la siguiente manera:

$$Per\acute{i}metro = b + h + b + h = 2b + 2h$$



Supongamos que tenemos una superficie cuadriculada donde cada pequeño cuadro representa una unidad cuadrada, si trazamos un rectángulo sobre esta superficie y deseamos conocer su área, es decir, queremos saber el espacio que cubre la figura. Para saberlo tenemos varias opciones, podemos contar cada uno de los cuadritos dentro de la figura, o bien, podemos dirigirnos al lado superior del rectángulo y contar cuántos cuadritos hay en esa primera fila, después nos dirigimos hacia el lado contiguo (el lado que se encuentra enseguida, el cual será de longitud distinta) y contamos el número de veces que se repite la fila. Obtenemos que cada fila tiene *b* cuadritos y se repite *h* veces. Por ello el área del rectángulo o el espacio que cubre es $b * h$ unidades cuadradas.



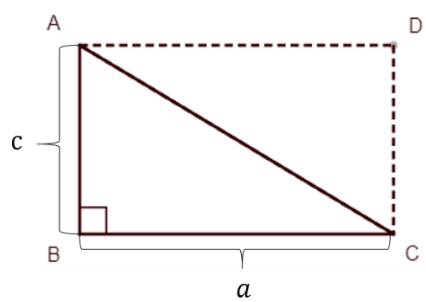
El área de un rectángulo es igual al producto de dos de sus lados contiguos:

$$Área = b * h$$

2. Triángulos

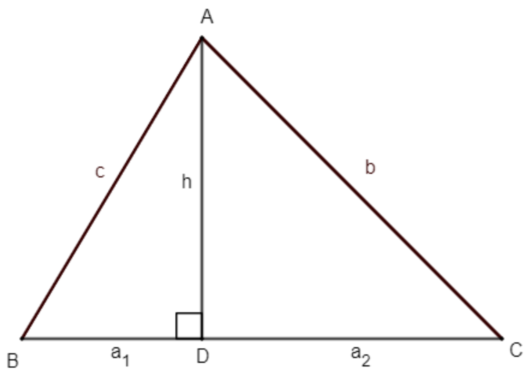
El perímetro de un triángulo se puede calcular simplemente sumando cada uno de sus lados.

En la escuela siempre nos han dicho que el área de un triángulo es $(base * altura)/2$. Esto se puede ver fácilmente si consideramos un rectángulo de altura c y base a partido a la mitad, de tal forma que se crean dos triángulos rectángulos.



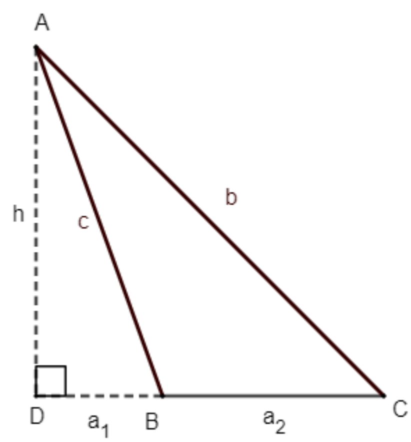
Como el área del rectángulo es $(a * c)$, cada triángulo tendrá un área de $(a * c)/2$, que es lo mismo que $(base * altura)/2$.

Pero lo anterior sólo se aplica para los triángulos rectángulos, entonces ¿por qué se usa para los otros triángulos? Para ver esto consideremos al siguiente triángulo que tiene una altura h y una base $a = a_1 + a_2$



Como el triángulo △ABC se divide en los triángulos △ABD y △ACD entonces $(ABC) = (ABD) + (ACD)$. Ahora se puede ver que los dos triángulos "nuevos" son rectángulos, así que sí podemos calcular su área, así que $(ABD) = \frac{a_1 h}{2}$ y $(ACD) = \frac{a_2 h}{2}$. Sustituyendo esto en la ecuación original $(ABC) = \frac{a_1 h}{2} + \frac{a_2 h}{2} = \frac{h}{2}(a_1 + a_2)$. Ahora, desde un inicio se dijo que la base del triángulo grande valía $a = a_1 + a_2$, entonces $(ABC) = \frac{ah}{2}$ que es $(base * altura)/2$.

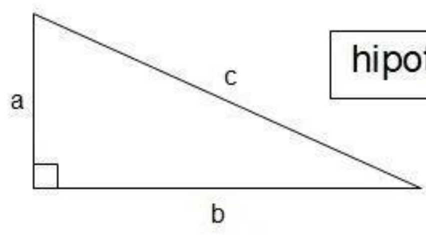
Ya sólo nos queda ver un caso de los triángulos.



Para conocer el área del triángulo △ABC podemos fijarnos que tenemos dos triángulos rectángulos: △ADC y △ADB. También se puede ver que $(ABC) = (ADC) - (ADB)$. Así que procedemos a calcular las áreas, $(ADC) = \frac{(a_1+a_2)h}{2}$ y $(ADB) = \frac{a_1 h}{2}$. Sustituyendo en la ecuación original tenemos que $(ABC) = \frac{(a_1+a_2)h}{2} - \frac{a_1 h}{2} = \frac{h}{2}(a_1 + a_2 - a_1) = \frac{a_2 h}{2}$. Como a_2 es la base del triángulo △ABC, la fórmula para calcular el área sigue siendo la misma $(base * altura)/2$.

Pero ¿qué pasaría si solo tuviéramos la medida de los lados y no la de la altura?

La altura de cualquier triangulo se puede encontrar usando el teorema de Pitágoras



$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}_1^{\,2} + \text{cateto}_2^{\,2}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En otro material se explicará este teorema con más detalle.

3. Datos de vital importancia

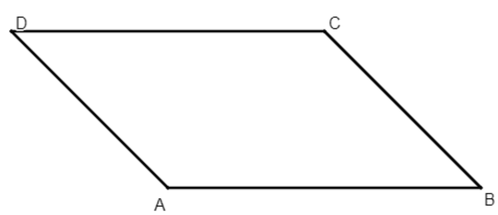
Todavía no llegamos a lo mero bueno, así que ahora que puedes, toma un respiro con estos datos.

1. En el S. VI, Boecio estableció el quadrivium, las cuatro ciencias matemáticas por excelencia que permitirían al hombre la sabiduría: aritmética, geometría, música y astronomía. https://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2003.pdf
2. La primera aproximación a nuestra escala musical fue obra de Pitágoras, quien dividió el espectro musical en octavas y cada octava en siete notas diferentes, cuya frecuencia asignada es mayor a la nota predecesora, de acuerdo con una progresión geométrica. https://algarabia.com/ciencia/sonidos-geometricos/
3. Ocelote viene del náhuatl ocelotl, que significa jaguar. Jaguar viene del guaraní yaguareté. https://www.biodiversidad.gob.mx/Biodiversitas/Articulos/biodiv118art1.pdf

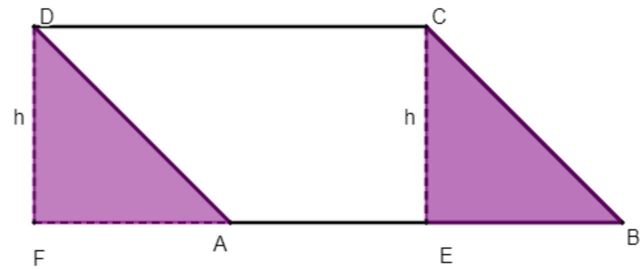
4. Cuadriláteros

Paralelogramos

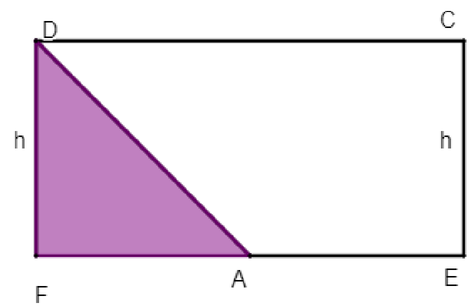
Un caso especial de los cuadriláteros es el de los paralelogramos. Estos son figuras de 4 lados (obviamente) en donde cada pareja de lados es paralela.



Para saber cómo calcular el área de ellos hay que trazar las alturas desde C y D.



De aquí se puede ver que los dos triángulos que se forman △DFA y △CEB son congruentes (iguales), pero el triángulo △DFA no forma parte del paralelogramo original. Usando lo anterior podemos suponer que le quitamos al paralelogramo el triángulo △CEB y se lo ponemos del otro lado de la figura, donde esta △DFA. Entonces la figura nos quedaría:



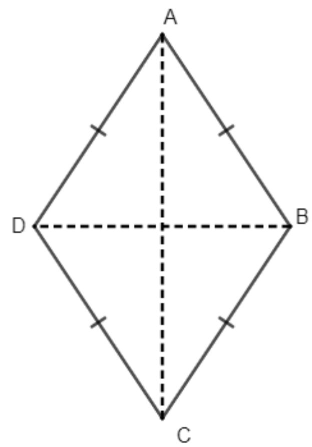
Se puede ver claramente que la figura es un rectángulo con altura h y de base tiene la misma medida que el paralelogramo original, esto se puede apreciar en el segmento CD el cual nunca se partió y su medida es igual al segmento AB, así como del segmento EF.

Entonces la fórmula para el área de un paralelogramo es $(base * altura)$. Puedes intentar voltear el paralelogramo original para comprobar que no importa que base se tome.

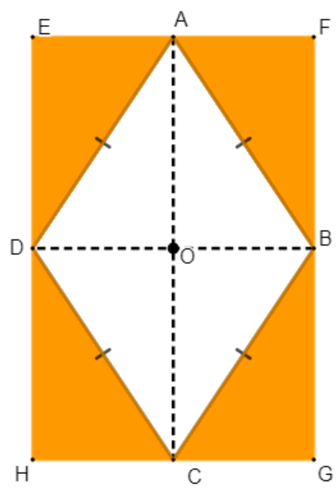
Para calcular el perímetro de un paralelogramo, igual que siempre, sólo debes de sumar cada uno de sus lados. Pero al tener dos pares de lados iguales puedes hacer la suma más rápido.

Rombos

Los rombos son figuras con cuatro lados con la misma longitud y que al mismo tiempo es un paralelogramo, así que se podría usar la fórmula anterior. Pero para estas figuras hay otra forma más fácil de calcular su área.



La forma de ver cómo calcular su área es trazar las líneas paralelas a las diagonales por sus vértices de la siguiente manera.



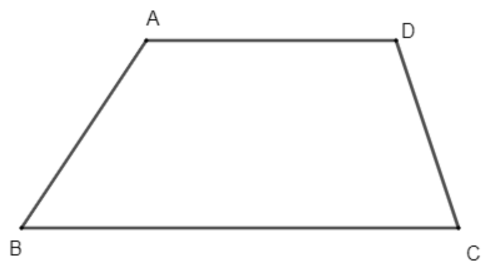
Si te fijas bien podrás ver que los triángulos rectángulos que se forman son iguales △EAD=△AFB=△ADO=△AOB=△DOC=△OBC=△DHC=△BCG, entonces el área del rombo ABCD es la mitad del rectángulo EFGH que tiene como medidas las diagonales del rombo.

Así que otra fórmula para calcular el área de un rombo es $(diagonal\ mayor * diagonal\ menor)/2$.

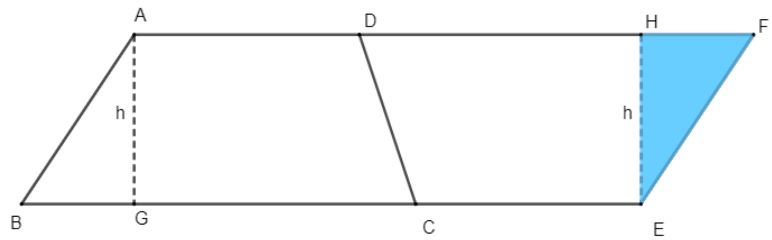
El perímetro de los rombos es muy sencillo ya que sus cuatro lados miden lo mismo.

Trapecio

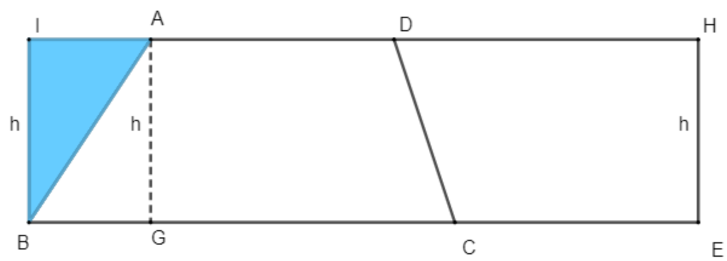
Los trapecios son cuadriláteros con UN par de lados paralelos.



Para ver cómo calcular su área vamos a pegar un trapecio igual en alguno de sus lados no paralelos. Noté que AD=CE, BC=DF y AB=EF.



Cómo se puede ver en la figura los triángulos rectángulos △ABG y el △EFH son iguales, entonces podemos mover el triángulo △EFH del otro lado para completar un rectángulo.



Entonces para calcular el área de los dos trapecios juntos sería $(base * altura)$ del rectángulo de la figura anterior. Ahora, está claro que la altura sería la altura del trapecio original, lo interesante es: ¿cuánto vale la base del rectángulo? Si te fijas en el segmento BE, este nunca cambió cuando se movió al triángulo, así que la base del rectángulo es igual a la suma de las bases del trapecio. Entonces el área del rectángulo es $(base\ mayor + base\ menor) * altura$, pero el rectángulo es dos veces el área del trapecio, entonces acabando para calcular el área de un trapecio la fórmula es $\frac{(base\ mayor+base\ menor)*altura}{2}$, en términos de las figuras sería $\frac{(BC+AD)h}{2}$.

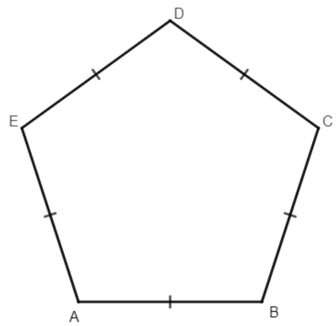
Para el perímetro de un trapecio no hay de otra, tendrás que sumar todos los lados.

5. Polígonos

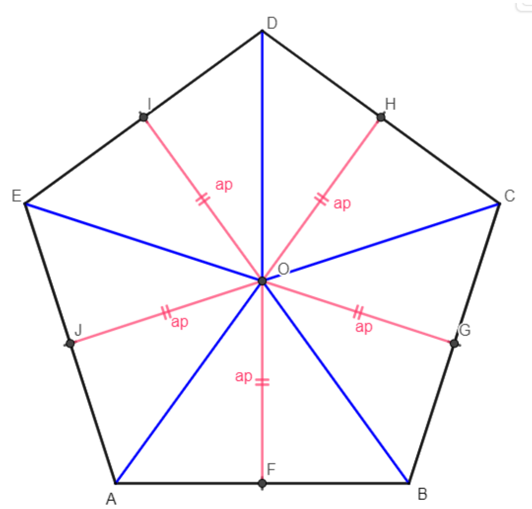
Regulares

Para calcular el área de polígonos regulares puedes usar lo que te enseñaban en la escuela, $área = \frac{perímetro*apotema}{2}$. Pero hay que ver de dónde sale esto.

Primero, supongamos que tenemos un pentágono.



La apotema de un polígono regular es la medida desde un lado hasta el centro del polígono. Así que para probar la formula “dibujaremos” el centro del pentágono, las apotemas y de pasó las rectas que van de cada vértice hasta el centro.



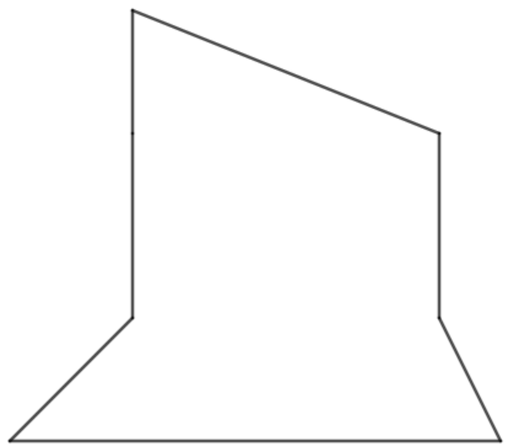
Por la figura se puede ver que $(ABCDE) = (ABO) + (BCO) + (CDO) + (DEO) + (AEO) = 5(ABO)$. Y cómo la apotema es la altura de los triángulos anteriores, entonces $(ABO) = \frac{lado*apotema}{2}$, por lo tanto $(ABCDE) = \frac{5*lado*apotema}{2} = \frac{perímetro*apotema}{2}$.

En general, para cualquier polígono regular se puede hacer lo anterior, sólo que al final no se multiplicará $5 * lado$, se hará $número\ de\ lados * lado$ que seguirá siendo el perímetro.

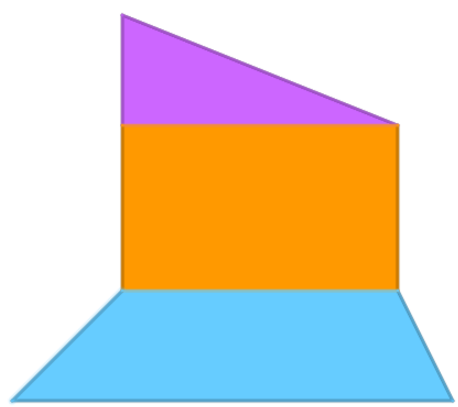
Irregulares

Para los polígonos irregulares no hay ninguna fórmula “mágica” que te dé su área, sin embargo, una forma para encontrarla es dividir la figura en otras figuras, de las cuales sí sepamos calcular su área.

Por ejemplo, si tenemos la siguiente figura

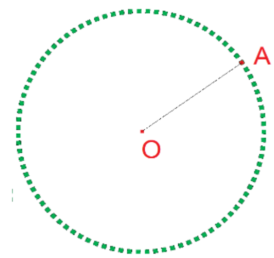


Una forma de dividirla (aunque no es la única) sería:



6. Circunferencias

Marca un punto O sobre un plano. Marca ahora otro punto A cualquiera y calcula la distancia entre O y A. Si buscas todos los puntos del plano que están a esa misma distancia del punto O, obtendrás una figura plana, que se conoce como **circunferencia**.



La **circunferencia** es una línea plana y cerrada en la que todos los puntos están a igual distancia de un punto O dado. El punto O se llama **centro** de la circunferencia y la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama **radio**.

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

•**Centro**: es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.

•**Radio**: es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.

•**Cuerda**: es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

•**Diámetro**: es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. (Nota: el diámetro tiene longitud doble que el radio)

•**Arco**: es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.

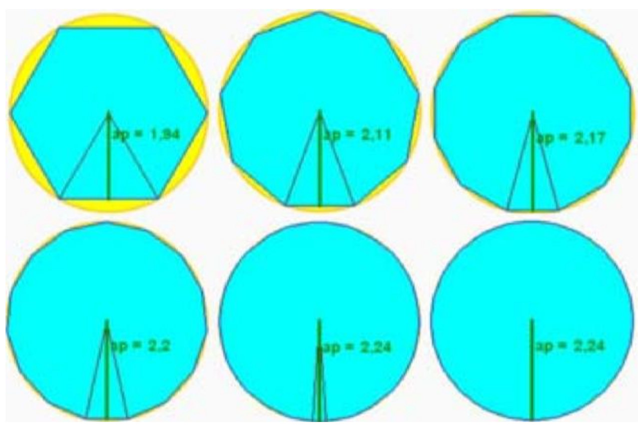
•**Semicircunferencia**: es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.

El **perímetro** de la circunferencia es la longitud de la circunferencia misma. En cualquier circunferencia, al dividir su longitud entre el radio, se obtiene una cantidad fija un poco mayor a tres. Esa división da siempre 3.14159265… número designado por la letra griega π y que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Si L es la longitud de la circunferencia y D el diámetro tenemos que $L = \pi \cdot D$. Como el diámetro es el doble del radio R, la longitud de la circunferencia será:

$$L = 2\pi R$$

Llamamos **círculo** a la región plana encerrada por una circunferencia. De forma más precisa, si O es el centro de la circunferencia, el **círculo** es la región del plano formada por todos los puntos cuya distancia al centro O es menor o igual que el radio de la circunferencia. Así, el **círculo** comprende a todos los puntos de la circunferencia y también a todos los puntos interiores a ella. En otras palabras, la **circunferencia** es el contorno, la "**frontera**" del **círculo**.

El **área de un círculo** se puede hallar considerándolo como un polígono regular de "muchos" lados, en el cual la apotema coincide con el radio. En la figura puede observarse cómo a medida que aumenta el número de lados del polígono, su perímetro aumenta y se acerca cada vez más al de la circunferencia. De igual manera, la apotema del polígono aumenta y su medida se va pareciendo más a la medida del radio de la circunferencia.



$$\acute{A}rea\ de\ un\ pol\acute{\imath}gono\ regular = \frac{Per\acute{\imath}metro \cdot apotema}{2}$$

$$Per\acute{\imath}metro = 2\pi R$$

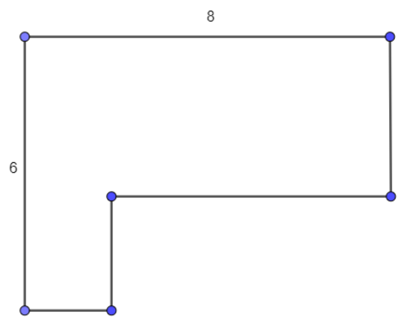
Entonces,

$$\acute{A}rea = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2$$

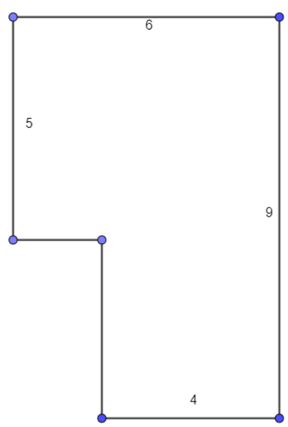
7. Problemas

NOTA: para estos problemas y en el futuro, si tienes que usar a π no lo sustituyas por 3.14159265 ni ningún otro número. Usa el símbolo π para que tu resultado sea exacto y no una aproximación. Lo mismo para las raíces.

1. Calcula el perímetro del siguiente polígono.



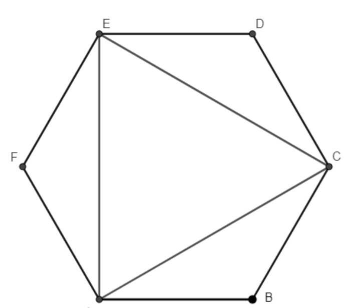
2. Calcula el área del hexágono



3. Demuestre que el área A de un triángulo equilátero de lado l es igual a

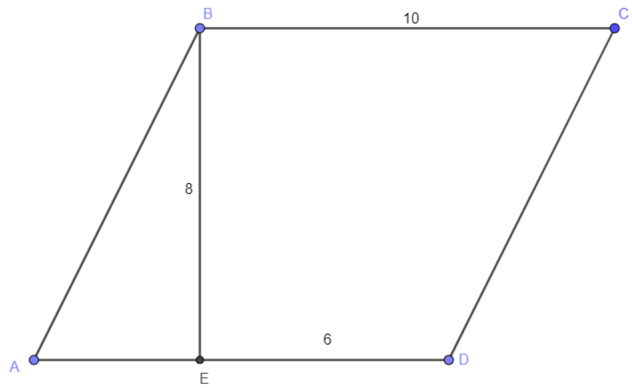
$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$$

4. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo *ACE* y el área del hexágono regular *ABCDEF*?

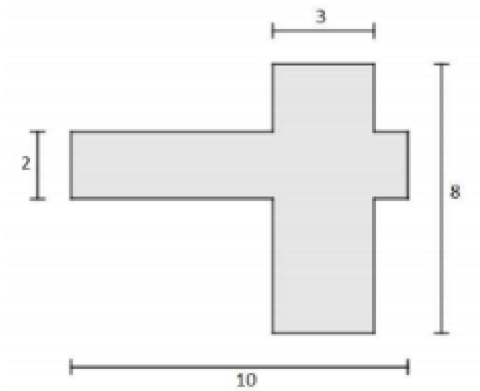


(Por ejemplo, la razón entre 6 y 3 es $\frac{6}{3} = 2$.)

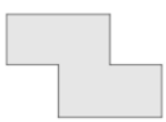
5. ¿Cuál es el área de la región *BEDC* en el paralelogramo *ABCD*?



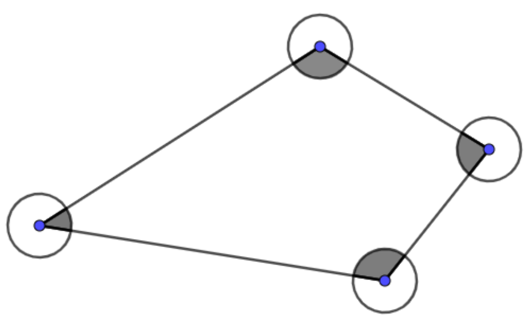
6. Encuentra el área de la región sombreada, la cual está formada por dos rectángulos perpendiculares.



7. El área de la siguiente figura es de 100 cm^2. ¿Cuál es su perímetro? (la figura consiste de cuatro cuadrados idénticos).

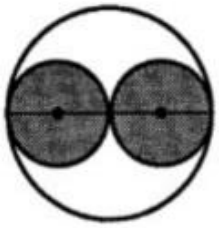


8. En los vértices del cuadrilátero que se muestra se han puesto circunferencias de radio uno, ¿cuál es el área de la región sombreada?

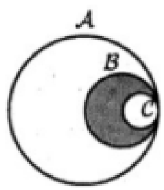


9. El problema anterior para un polígono de *n* vértices.
10. Imagina que cuando se acabe la cuarentena viajas por el mundo caminando alrededor del ecuador. ¿Cuál es la diferencia entre lo que ha recorrido tu cabeza a lo que han recorrido tus pies?

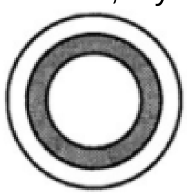
11. Dentro de un disco se han trazado dos discos iguales tangentes entre sí (es decir, sólo se tocan en un punto) y tangentes al disco grande, ¿qué región es más grande, la sombreada o la no sombreada?



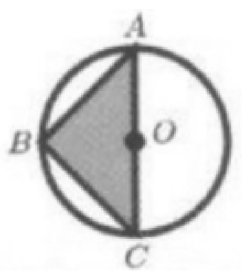
12. El centro de *B* está sobre la circunferencia *C*, el centro de *A* está sobre la circunferencia *B*. Calcula la razón entre el área de la región sombreada y el área no sombreada.



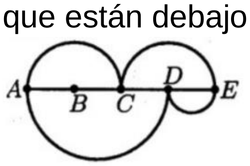
13. Los centros de las circunferencias en la siguiente figura coinciden y los radios miden 3, 4 y 5 cm. ¿Qué porcentaje del círculo mayor está sombreado?



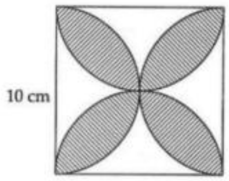
14. El círculo de radio 2 cm tiene su centro en O, el lado *AC* del triángulo es un diámetro y *BO* es perpendicular a *AC*. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?



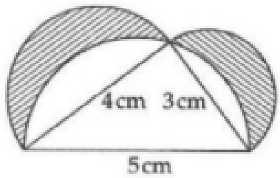
15. La recta *AE* se divide en cuatro partes iguales con los puntos *B*, *C* y *D*. Dibujemos semicírculos en los segmentos *AC*, *CE*, *AD* y *DE*. ¿Cuál es la razón entre el área de los semicírculos que están arriba de la recta *AE* y el área de los semicírculos que están debajo de *AE*?



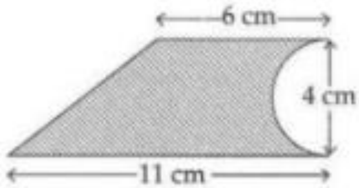
16. Calcula el área de la región sombreada.



17. Calcula el área de la región sombreada.

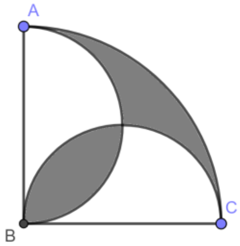


18. Calcula el área de la región sombreada.

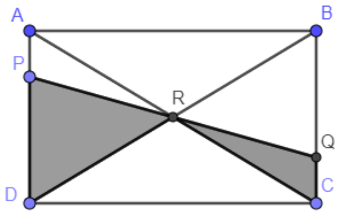


19. Calcula el área de la región sombreada.

20. Dos semicírculos de radio *r* se intersectan de tal forma que sus diámetros AB y BC son perpendiculares, además desde B se traza una cuarta parte de círculo de radio BC. Calcule el área de la región sombreada.



21. (OMM Aguascalientes., 2010) En el rectángulo ABCD de área 24 cm^2, sea R el punto de intersección de sus diagonales. Por el punto R se traza una recta PQ como en la figura. Calcule, en cm^2, el área sombreada.



8. Vídeos

Área de triángulos

https://youtu.be/ljRrWa6uU9k

Área de paralelogramos

https://youtu.be/axwnCurq4WU

Área de polígonos regulares

https://youtu.be/0XSjJlmAwK0

Ejercicio de perímetro y área de una circunferencia

https://youtu.be/IkUZ9DWwB-I