

0. Antes de empezar

Un pequeño comercial sobre lo que es la Olimpiada de Matemáticas.

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas es el concurso más importante para alumnos preuniversitarios en el país, su objetivo es promover el estudio de las matemáticas de forma creativa, alejándose del estudio tradicional que promueve la memorización y mecanización.

De entre los ganadores de la fase estatal se seleccionarán a 6 alumnos para que representen al estado de Aguascalientes en el Concurso Nacional, en el que participan alrededor de 190 alumnos de todo el país. Este año el Concurso Nacional se llevará a cabo en noviembre durante una semana en Guanajuato, Gto. En el Concurso Nacional se seleccionarán a los alumnos que representarán a México en las diferentes olimpiadas internacionales.

Así que aprovecha estos días de cuarentena para hacer problemas y mejorar.

1. Combinatoria

La combinatoria es el área que se encarga de estudiar las maneras de contar algo, o las diferentes combinaciones que existen en algunos conjuntos. A menudo encontrarás problemas que requieren que hagas cuentas, aunque normalmente hay maneras de hacerlas mucho más sencillas. Lo único que necesitas saber son sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, cómo contar y MUCHA creatividad.

Recuerda que apenas estamos empezando, así que no desesperes, poco a poco llegaremos a temas más interesantes.

2. Principio Fundamental del Conteo

Empecemos con un problema simple:

Tenemos los colores amarillo, verde, azul y rojo. ¿De cuántas formas podemos colorear la flor que se encuentra a continuación, si su tallo y hojas deben ser del mismo color, al igual que sus pétalos?



La solución más obvia sería simplemente colorear la flor de todas las formas posibles y luego contar dichas formas, así



Etcétera.

Sin embargo, ¿cómo estar seguros de que ya no hay ninguna otra forma de colorear la flor? En ese sentido, no basta con encontrar muchas formas de colorear la flor, sino que es necesario hacerlo con una metodología que nos garantice hallar todas las formas de colorearla.

Una forma de hacerlo es colorear una característica de la flor a la vez, hasta terminar de colorear por completo la flor, de la siguiente manera:

Tallos y hojas	Pétalos
 <p>Verdes</p>	 <p>Rojos</p>
	 <p>Azules</p>
	 <p>Amarillos</p>
	 <p>Verdes</p>
 <p>Amarillos</p>	 <p>Rojos</p>
	 <p>Azules</p>
	 <p>Amarillos</p>
	 <p>Verdes</p>

 <p>Azules</p>	 <p>Rojos</p>
	 <p>Azules</p>
	 <p>Amarillos</p>
	 <p>Verdes</p>
 <p>Rojos</p>	 <p>Rojos</p>
	 <p>Azules</p>
	 <p>Amarillos</p>
	 <p>Verdes</p>

Así, podemos ver que hay 16 formas de colorear la flor. Una manera de darnos cuenta de ello sin tener que colorear las 16 flores es viendo que hay 4 colores para el tallo y las hojas y 4 colores para los pétalos. El color de los pétalos no depende

del color del tallo, así que si encontráramos todas las formas de colorear la flor hallaríamos 4 formas de colorear (una por cada color de los pétalos) con el mismo color de tallo, para cada uno de los 4 colores de tallo distintos. Dicho de otra forma:

$$4 \text{ colores de tallo y hojas} \times 4 \text{ colores de pétalos} \\ = 16 \text{ formas de colorear la flor}$$

Una lógica similar es parte esencial de muchos problemas, lo que ha llevado a enunciar el:

Principio Fundamental de Conteo: *Si una cierta tarea puede realizarse de m maneras diferentes y, para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de n maneras distintas, entonces las dos tareas pueden realizarse (en ese orden) de mn maneras diferentes.*

En este caso, nuestra primera tarea fue colorear el tallo y las hojas de la flor, y la segunda fue colorear los pétalos. Observa que, en este caso, no nos interesa el orden en que coloreamos la flor, nada más el dibujo final.

Sin embargo, hay problemas en que sí nos interesa el orden.

3. Datos de Vital Importancia

Si quieres un pequeño descanso, revisa los siguientes datos de vital importancia:

1. Aguascalientes no es el centro geográfico del país, sino Cañitas de Felipe Pescador, en Zacatecas.
2. El nombre original de la Catrina era “Calavera Garbancera” y representaba a una empleada doméstica comportándose como miembro de la “alta sociedad”.
3. “Meme” es cualquier unidad de transmisión cultural, según el concepto del etólogo Richard Dawkins, que acuñó el concepto en 1976 en su libro “El Gen Egoísta”, abreviando mímeme, palabra derivada del griego para “imitación”, aunque propuso etimologías alternativas. El significado actual deriva directamente de este.

4. Conteo con Orden

Ahora sí, continuando, ¿qué pasa cuando sí nos interesa el orden al momento de contar?

Por ejemplo, podríamos preguntarnos de cuántas formas podemos constituir un comité estudiantil conformado de un presidente, un secretario y un tesorero, si hay 34 alumnos y ningún miembro del comité puede ocupar dos puestos distintos.

En este caso, el orden son los puestos que pueden ocupar los miembros del comité. No es lo mismo un comité en que Ale es presidente, Erik secretario y Juanito tesorero, a otro en el que Ale es presidente, Juanito secretario y Erik tesorero.

Así, tendríamos 34 alumnos que podrían ocupar el primer puesto, pero solo 33 que podrían tener el segundo (los 34 alumnos menos el que ocupa el primer puesto) y nada más 32 aspirarían al último (los 34 alumnos menos los que ocupan los otros dos). Esto es:

$$34 \text{ candidatos a presidente} \times 33 \text{ candidatos a secretario} \\ \times 32 \text{ candidatos a tesorero} = 35904 \text{ posibles comités}$$

Ahora bien, si no nos interesara el puesto, sino solamente los alumnos que conforman el comité, tendríamos que ver cuántos de esos 35904 posibles comités se conforman por los mismos alumnos. Bueno, teniendo los 3 alumnos que conforman un comité, resulta que el primer alumno puede ocupar uno de 3 puestos, habiendo 2 puestos disponibles para el segundo y solamente 1 para el último. Es decir:

$$3 \text{ posibles puestos del alumno A} \times 2 \text{ posibles puestos del alumno B} \\ \times 1 \text{ posible puesto del alumno C} \\ = 6 \text{ comités conformados por los alumnos A, B y C}$$

Por cierto, el producto $3 \cdot 2 \cdot 1$ se suele denotar por $3!$ (tres factorial), el producto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ por $5!$ (cinco factorial), el producto $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ por $10!$ (diez factorial), etc.

Volviendo a lo que estábamos, la conclusión es que cada conjunto (grupo, sin importar el orden) de 3 personas que puede conformar el comité es capaz de conformar 6 comités distintos. Tomando esto en cuenta, tenemos:

$$\frac{35904 \text{ posibles comités}}{\binom{6 \text{ posibles comités}}{\text{conjunto de miembros}}} = 5984 \text{ conjuntos de miembros del comité}$$

Este número nos representa la cantidad de formas de escoger 3 personas (elementos) entre 34, sin considerar el orden en que elegimos dicho elemento. Se puede denotar por:

$$\binom{34}{3}$$

De manera general:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

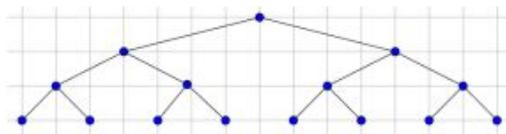
denota la cantidad de conjuntos de k elementos que se pueden escoger a partir de n elementos.

5. Problemas

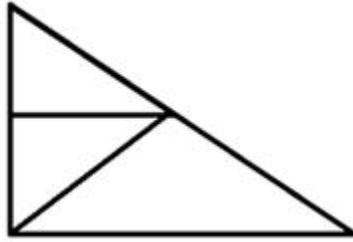
Ahora te toca a tí trabajar, recuerda que para aprender más, tendrás que hacer muchos problemas, así que manos a la obra.

Trata de escribir la solución de los problemas con todo y su procedimiento, esto será útil más adelante.

1. ¿Cuántas matrículas de auto se pueden hacer tales que empiecen con tres letras (el alfabeto tiene 27), seguidas de cinco dígitos?
2. ¿Cuántos números de 34 cifras hay?
3. Se tiene un diagrama como el mostrado en la figura. ¿De cuántas maneras se puede llegar del nivel de arriba al nivel de abajo?



4. Un examen de opción múltiple consta de 10 preguntas. Cada pregunta tiene 5 opciones distintas pero solamente una es correcta.
 - a. ¿De cuántas maneras se puede contestar el examen?
 - b. ¿De cuántas maneras se puede contestar el examen y obtener cero respuestas correctas?
5. ¿De cuántas maneras se puede colorear el siguiente triángulo con cuatro colores, de forma tal que los tres triángulos que lo conforman y compartan un lado sean de color distinto? (Prueba a buscar dos formas de resolver este problema)



6. Paco y sus amigos quedaron varados en una isla. Como no saben encender fogatas, decidieron hacer un papalote, pues a muchos náufragos les ha funcionado. Tienen 8 colores de papel distinto y la van a hacer con la siguiente forma:



- a. ¿Cuántos papalotes pueden hacer en principio?
 - b. ¿Cuántos si no quieren que los triángulos que compartan un lado sean del mismo color?
 - c. ¿Cuántos papalotes distintos pueden hacer si no le van a poner cola? (Un papalote es el mismo que otro si obtienes el primero mediante una rotación del segundo)
 - d. ¿Cuántos papalotes sin cola pueden hacer sin que los triángulos que comparten un lado sean del mismo color?
7. Tengo 13 frutas. ¿Cuántos biónicos puedo hacer usando 5?
8. ¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez ocho torres de modo que no se puedan comer una a la otra?
9. En mi salón, somos 34 alumnos. El proyecto final será en equipos de 6. ¿En cuántos posibles equipos me podría anotar?
10. ¿Cuántas palabras se pueden escribir usando todas las letras de la palabra AGUASCALIENTES? (Observa que las As son idénticas entre sí, al igual que las Ss y las Es)
11. ¿De cuántas formas puedes acomodar a 12 personas en 3 grupos de 4?
12. En cierto concurso de matemáticas hay 63 participantes. Si la delegación del concurso nacional estará conformada por 6 participantes, ¿cuántas delegaciones distintas se podrían formar?

Si acabaste muy rápido los problemas puedes consultar más en los siguientes enlaces:

<http://ommags.com/new/wp-content/uploads/2017/04/22-Abril-Conteo-Combinatoria.pdf>

<https://ommgto.files.wordpress.com/2011/03/problemasconteo.pdf>

6. Vídeos

Principio Fundamental del Cálculo (explicado con ropa en lugar de flores):

<https://www.youtube.com/watch?v=PvYIOC-uE68>

Factoriales:

<https://www.youtube.com/watch?v=jlapr6zfn2g>