ÁNGULOS

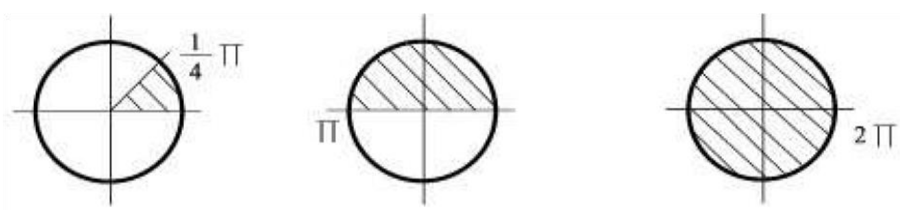
Mixtli Quetzali Melchor Fuentes

1. Ángulos radianes y grados

Un radián equivale al ángulo definido por el arco de una circunferencia, siendo la longitud de ese arco igual al radio.

Sabemos que se define al número π como la relación entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, por lo tanto, el perímetro dividido por π es igual al diámetro (es decir a dos veces el radio). El ángulo de una circunferencia completa tiene sobre su perímetro 2π arcos de esas características (de longitud igual al radio). Entonces, el ángulo de una circunferencia completa equivale a 2π radianes.

Es muy común encontrar al número π cuando se miden ángulos con radianes, para evitar expresar de otra manera los números periódicos tales como π y sus múltiplos y submúltiplos (Por ejemplo, π radianes equivale aproximadamente a 3,14 radianes).



Algunas equivalencias entre grados y radianes

0° = 0 Radianes

90° = ½ π Radianes

180° = π Radianes

270° = (3/2) π Radianes

360° = 2π Radianes

Conversión entre grados y radianes

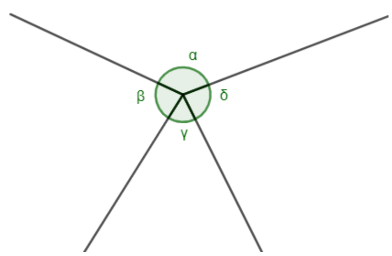
Para pasar de grados a radianes y viceversa, utilizamos una regla de tres simple. Tomamos por ejemplo 180° como π Radianes y luego calculamos el número.

$$\frac{\pi\ radianes}{r} = \frac{180\ grados}{g}$$

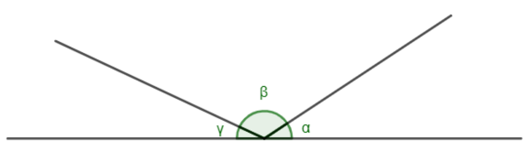
2. Ángulos en un punto y en la línea

Cuando se escribe ∠ABC se lee “ángulo ABC”, y denota al ángulo formado por los puntos A, B y C. De manera que empieza en A, pasa por (o gira en) B y va hacia C.

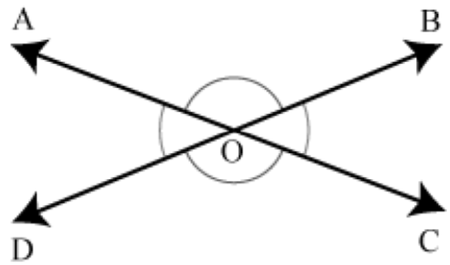
Propiedad 1. La suma de todos los ángulos alrededor de un punto siempre es 360 grados ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$).



Propiedad 2. La suma de todos los ángulos sobre una línea siempre es 180 grados ($\alpha + \beta + \gamma = 180°$).



Propiedad 3. Dos ángulos que son opuestos por el vértice son iguales entre sí.



<AOD = <BOC

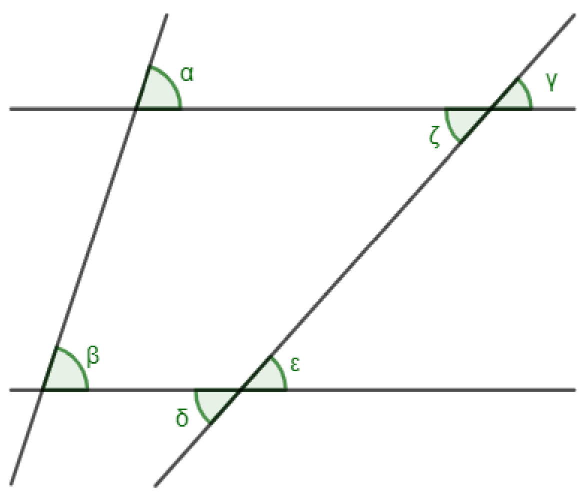
Demostración:

Como <AOD+<DOC=180°, porque esos son todos los ángulos que están sobre la recta $\overline{AC}$. De la misma forma <DOC+<BOC=180°. Ahora, como ambas ecuaciones son iguales a 180°, podemos igualarlas, entonces tendríamos que <AOD+<DOC=<DOC+<COB. Restando <DOC a ambos lados tendríamos que <AOD=<BOC.

3. Líneas paralelas

Las líneas paralelas también tienen ciertas propiedades en cuestión de los ángulos. Es importante recordar también que funciona a la inversa; es decir, si encontramos que alguna de estas propiedades se cumple, entonces podemos garantizar que hay líneas paralelas.

Hay tres tipos de ángulos que se pueden formar con líneas paralelas. Por ejemplo, en la siguiente figura ocurre que $\alpha = \beta$, $\gamma = \varepsilon$, $\delta = \zeta$ En este caso, cada una de esas parejas se llaman correspondientes.



Propiedad 1. Los valores de dos ángulos que son correspondientes son iguales entre sí.

Dado que $\varepsilon = \gamma$ por ser correspondientes y que $\gamma = \zeta$ por ser opuestos por el vértice, se deduce que $\varepsilon = \zeta$. A esta pareja se le llama alternos internos.

Propiedad 2. Los valores de dos ángulos que son alternos internos son iguales entre sí.

Por otra parte, como $\delta = \zeta$ y $\zeta = \gamma$, podemos concluir que $\delta = \gamma$. Estos dos son alternos externos.

Propiedad 3. Una pareja de ángulos que sean alternos externos tendrá valores iguales entre sí.

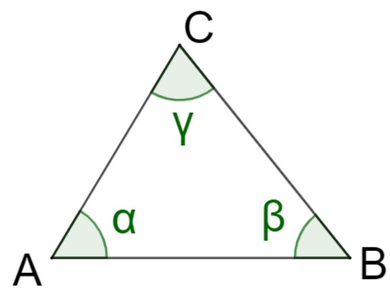
4. Datos de vital importancia

Si quieres un pequeño descanso, revisa los siguientes datos de vital importancia (TIENES PROHÍBIDO REVISAR LAS LIGAS ANTES DE ACABAR DE LEER EL MATERIAL):

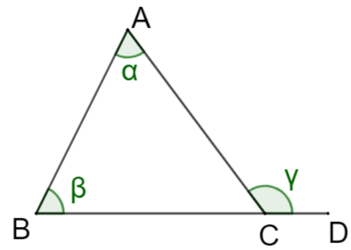
1. Legalmente, el centro geográfico del país es Tequisquiapan, en Querétaro. Esto conforme a un decreto de Venustiano Carranza que data de 1916. https://queretanizate.com/tequisquiapan-el-centro-de-mexico/
2. El nombre "Catrina" se debe a Diego Rivera, quien reinterpretó al personaje en su mural "Sueño de una tarde dominical en la Alameda central", cambiando radicalmente y popularizando el concepto. https://www.milenio.com/cultura/catrina-significado-origen
3. La esposa de Pitágoras, llamada Teano, fue una gran matemática. https://www.eluniversal.com/doblevia/31121/pitagoras-mucho-mas-que-un-teorema

5. Triángulos

Propiedad 1. La suma de los ángulos internos de un triángulo siempre da un total de 180°. Significa que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

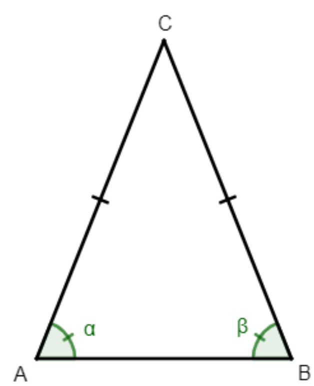


Propiedad 2. Un ángulo externo en un triángulo es igual a la suma de los otros dos ángulos internos. Eso significa que γ = α + β.

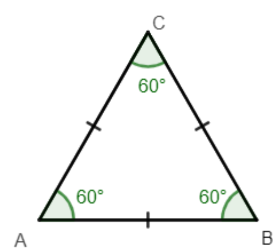


Demostración: Como $\alpha + \beta + < ACB = 180°$, entonces $< ACB = 180° - \alpha - \beta$. Como $< ACB + \gamma = 180°$, entonces $\gamma = 180° - < ACB = 180° - (180° - \alpha - \beta) = 180° - 180° + \alpha + \beta = \alpha + \beta$.

Propiedad 3. En un triángulo isósceles, los ángulos que son opuestos a los lados iguales son iguales entre sí. Eso significa que ∠CAB = ∠ABC.



Propiedad 4. En un triángulo equilátero, todos los ángulos son iguales a 60°.

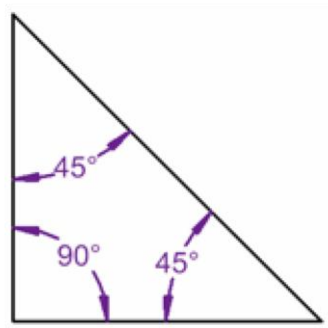


6. Ángulos internos de un polígono

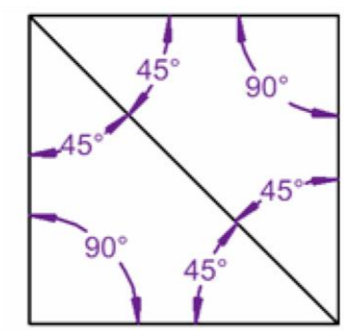
Cuadrado

Los ángulos interiores de un *cuadrilátero* suman 360° porque en un cuadrado hay dos triángulos

Los ángulos interiores de este triángulo suman 180°. (90°+45°+45°=180°).

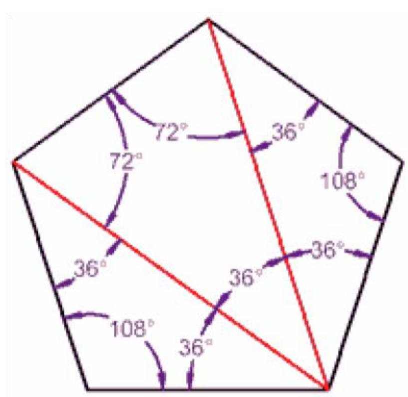


Y los de este cuadrado suman 360°, ¡porque el cuadrado está hecho de dos triángulos!



Pentágono

Un pentágono tiene 5 lados, y se puede dividir en **tres triángulos**, así que sus ángulos interiores suman 3 × 180° = **540°.** Y si es regular (todos los ángulos son iguales), cada uno mide 540**°** / 5 = 108**°**



La regla general

			Si es regular...	
Figura	**Lados**	**Suma de los ángulos interiores**	**Forma**	**Cada ángulo**
Triángulo	3	180°		60°= 180/3
Cuadrilátero	4	360°		90°=360/4
Pentágono	5	540°		108°=540/5
Hexágono	6	720°		120°=720/6
...	...	..	...	...
Cualquier polígono	**n**	(**n**-2) × 180°		(**n**-2) × 180° / **n**

7. Conceptos básicos

Los ángulos reciben nombres distintos dependiendo de su medida:

Agudo: si es menor que 90°.

Recto: si es igual a 90°.

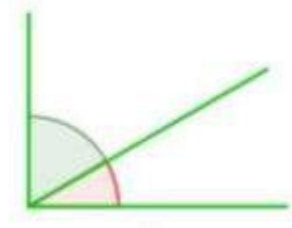
Obtuso: si es mayor que 90° pero menor que 180°.

Llano: si es igual a 180°.

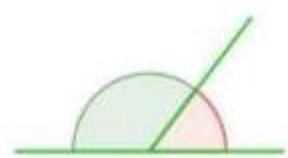
Cóncavo: si es mayor que 180° pero menor que 360°.

Completo: si es igual a 360°

A una pareja de ángulos que suma un ángulo recto se les llama **complementarios**.



A una pareja de ángulos que suma un ángulo llano se les llama **suplementarios**.



Hay dos formas de clasificar a los triángulos: por sus lados o por sus ángulos.

Por sus ángulos un triángulo puede ser:

Acutángulo: si todos sus ángulos son agudos.

Rectángulo: si tiene un ángulo recto.

Obtusángulo: si tiene un ángulo obtuso.

Por sus lados un triángulo puede ser:

Escaleno: si todos sus lados (por ende, sus ángulos) son distintos.

Isósceles: si hay una pareja de lados iguales. Este tipo de triangulo también tiene una pareja de ángulos iguales.

Equilátero: si todos sus lados (por ende, sus ángulos) son iguales.

Los cuadriláteros se clasifican en:

Paralelogramo: si tiene dos pares de lados paralelos.

Rectángulo: si sus lados constituyen ángulos rectos.

Cuadrados: posee sus cuatro lados y ángulos iguales, además sus ángulos tienen 90°.

Rectángulos: sus lados crean ángulos rectos entre sí.

Oblicuángulos: se definen según sus ángulos. Pueden ser agudos u obtusos.

Rombo: conformado por lados de idéntica longitud.

Romboide: tiene una conformación de lados y ángulos idénticos, pero dos a dos.

Trapecios: Se trata de un cuadrilátero que consta de dos líneas paralelas y dos no.

Trapecio rectángulo: se distingue por poseer una línea ubicada de forma perpendicular a la base. En sus ángulos se diferencian dos rectos, uno obtuso y uno agudo.

Trapecio isósceles: sus lados no son paralelos y son de diferentes medidas. Posee ángulos internos, dos obtusos y dos agudos, que tienen la propiedad de ser iguales entre sí.

Trapecio escaleno: conformado por ángulos internos de desiguales medidas.

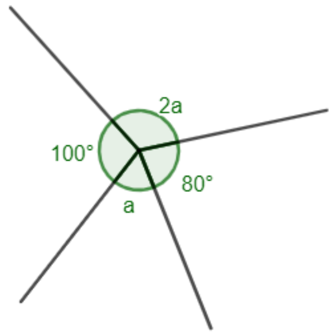
Cuadrilátero cóncavo: por lo menos uno de sus tantos ángulos interiores, tiene que medir más de 180° para entrar en esta clasificación.

Cuadrilátero convexo: todos sus ángulos miden menos de 180°

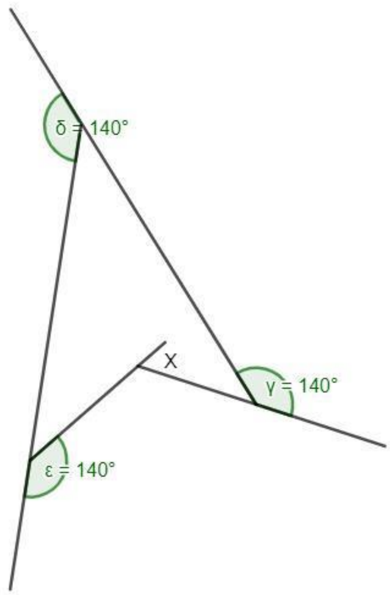
8. Problemas

1. En $\triangle ABC$, se tiene que $\angle A = 50°$ y $\angle B = 30°$. Encuentra cuánto vale $\angle C$.
2. En un triángulo XYZ, se sabe que $\angle XYZ = 80°$ y $\angle YZX = 70°$. ¿Es $\triangle XYZ$ acutángulo, rectángulo u obtusángulo?
3. En un triángulo isósceles, el ángulo entre los lados iguales mide 80°. ¿Cuánto valen los otros dos ángulos?
4. Se tiene un cuadrilátero ABCD de tal forma que la diagonal BD queda fuera de la figura. Se traza la diagonal AC. Se sabe que el ángulo $\angle CAB = 30°$, que $\angle ABC = 40°$, que $\angle DCB = 120°$, y se sabe que $CD = AC$. Encuentra el valor de todos los demás ángulos ($\angle BCA$, $\angle ACD$, $\angle CDA$ y $\angle DAC$).

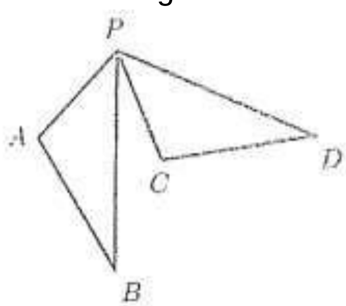
5. En la siguiente figura, ¿cuánto vale el ángulo a?



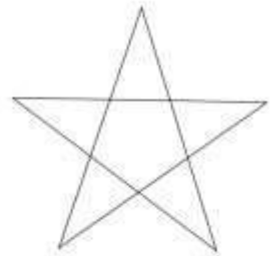
6. ¿Cuánto mide el ángulo x en la figura?



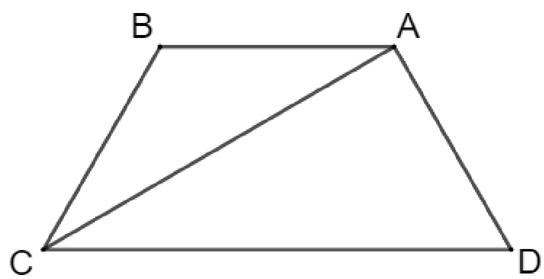
7. Demuestra que en un paralelogramo los ángulos opuestos son iguales.
8. Sea ABC un triángulo rectángulo con <A = 90°. Demuestre que la altura por A divide al triangulo en 2 triángulos semejantes.
9. En la figura, los triángulos PAB y PCD son idénticos. Si el ángulo <APC = 67° y el ángulo CPD = 38°. ¿Cuánto mide el ángulo BPC?



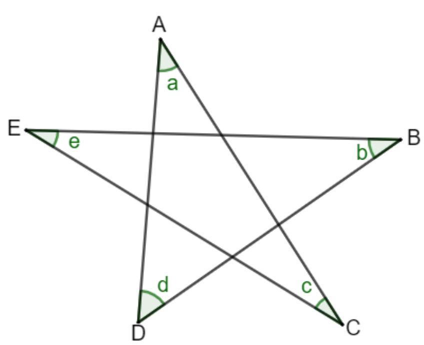
10. ¿Cuánto mide el ángulo interior de una estrella regular de 5 puntas?



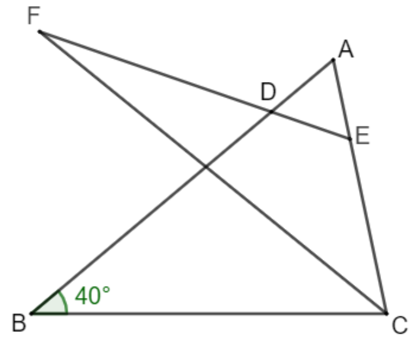
11. El trapecio isósceles es tal que AD = AB = BC = 1 y DC = 2, donde AB es paralelo a DC ¿Cuánto mide el ángulo CAD?



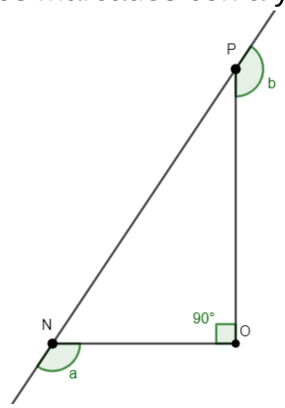
12. En la figura, ¿Cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?



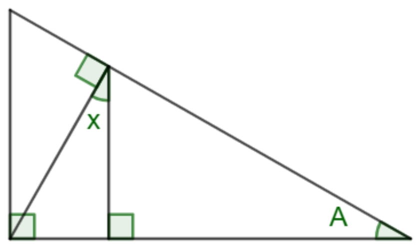
13. En la siguiente figura AD = AE y la línea L es bisectriz del ángulo <ACB (L divide al ángulo <ACB en dos ángulos iguales). Sea F la intersección de L con la recta DE. Si sabemos que el ángulo <ABC es 40°. ¿Cuánto mide el ángulo <CFE?



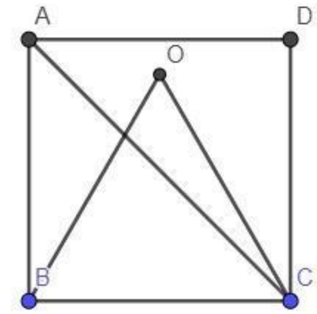
14. ¿Cuál es la suma de los ángulos marcados con a y b en la figura?



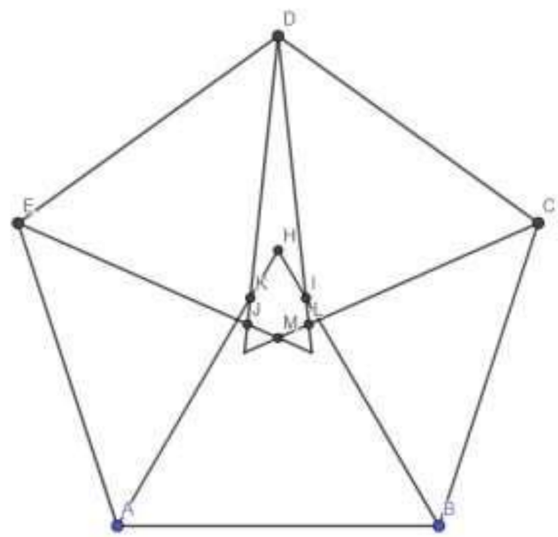
15. En la siguiente figura, los tres ángulos marcados son ángulos rectos. Si el ángulo A mide 20°. ¿Cuánto mide el ángulo x?



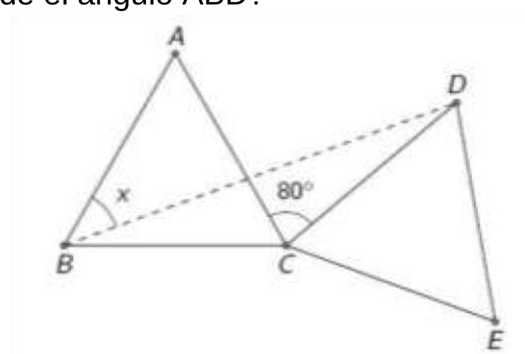
16. En la figura ABCD es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. ¿Cuánto mide el ángulo OAC?



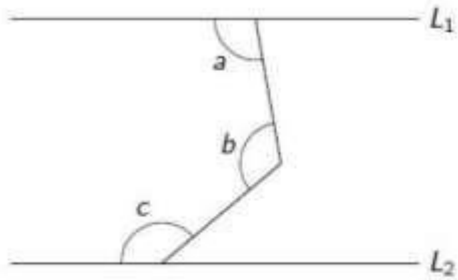
17. Se tiene un pentágono regular de lado 2, en tres de sus lados se trazan 3 triángulos equiláteros hacia el interior del pentágono como se muestra en la figura. Al traslapare los tres triángulos se forma un hexágono irregular. Determina la medida de cada uno de los ángulos internos.



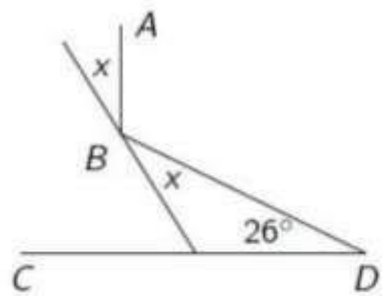
18. En la figura, ABC y CDE son dos triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide 80°, ¿cuánto mide el ángulo ABD?



19. La recta L_1 es paralela a L_2, el ángulo $\angle a = 100°$ y el ángulo $\angle b = 120°$ - ¿Cuánto mide el $\angle c$?



20. Si el segmento AB es perpendicular a CD, ¿cuánto mide el ángulo x?



9. Vídeos

Teoría básica:

https://www.youtube.com/watch?v=ifWqnJLK860

Un poco de líneas paralelas:

https://www.youtube.com/watch?v=-oXpnNQJ3aI

Ejercicios de geometría resueltos (OJO los problemas de arriba quizás no se solucionen igual que en estos vídeos):

https://www.youtube.com/watch?v=E9t_0TE97rQ

https://www.youtube.com/watch?v=cH3lRnNPgE0

Para que se inspiren:

https://youtu.be/ktWeH0YIWCE