

EXAMEN ELIMINATORIO PRESENCIAL DE SECUNDARIA

SOLUCIONES

1. Sandra compra 8 rosas rojas todas las semanas y las reparte entre los 3 floreros de la casa. Un florero está en la sala, otro en el comedor y el otro en el dormitorio. ¿De cuántas formas diferentes puede distribuir las flores entre los floreros si quiere que todas las habitaciones tengan por lo menos una flor?

**Respuesta: 21**

Solución: Primero coloca 1 en cada florero. después tiene que poner las 5 restantes y ello es equivalente a tener tres números que sumen 5:

5 + 0 + 0, pero hay tres formas de elegir al florero que tenga las 5: 5 + 0 + 0; 0 + 5 + 0, y 0 + 0 + 5.

4 + 1 + 0, pero hay 6 formas de elegir a los floreros:

4 + 1 + 0; 4 + 0 + 1; 1 + 4 + 0; 1 + 0 + 4; 0 + 4 + 1, y 0 + 1 + 4

3 + 2 + 0, pero hay 6 formas de elegir a los floreros:

3 + 2 + 0; 3 + 0 + 2; 2 + 3 + 0; 2 + 0 + 3; 0 + 3 + 2, y 0 + 2 + 3

3 + 1 + 1, pero hay tres formas de elegir al florero que tenga las 3: 3 + 1 + 1; 1 + 3 + 1, y 1 + 1 + 3.

2 + 2 + 1, pero hay tres formas de elegir al florero que tenga sólo 1: 1 + 2 + 2; 2 + 1 + 2, y 2 + 2 + 1.

Así, en total hay  $3 + 6 + 6 + 3 + 3 = 21$ .

2. ¿Cuántos ceros se necesitan para escribir todos los números de 3 dígitos? Nota: para escribir el número 2020 se necesitan 2 ceros.

**Respuesta: 180**

Solución: Los que tienen un 0, son de la forma  $ab0$  o  $a0b$ , pero  $a$  y  $b$  puede tomar valores del 1 al 9, por tanto cada forma son  $9 \times 9 = 81$ , es decir  $2 \times 81 = 162$  los que tienen un 0.

Los que tienen dos 0 son de la forma  $a00$ , pero  $a$  puede tomar valores del 1 al 9, por tanto hay 9 números, pero para escribirlos se requiere de 18 ceros pues cada uno usa dos 0.

Así en total son  $162 + 18 = 180$ .

3. En la siguiente lista de cinco números, los tres primeros suman cien; los tres del medio suman doscientos; y los tres últimos suman trescientos. ¿Qué número está en el centro de la lista?

|    |  |  |  |     |
|----|--|--|--|-----|
| 10 |  |  |  | 130 |
|----|--|--|--|-----|

**Respuesta: 60**

Solución:

Si llamamos  $a, b, c$  (de izquierda a derecha) a los tres números del medio, podemos escribir:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a + b = 100 \\ \text{(II)} \quad a + b + c = 200 \\ \quad b + c + 130 = 300 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(I)} \quad a + b = 90 \\ \text{(III)} \quad b + c = 170 \end{array} \left. \begin{array}{l} a = 90 - b \\ c = 170 - b \end{array} \right\} \text{Sustituyendo en (II)}$$

tenemos:  $90 - b + b + 170 - b = 200$ ;  $90 + 170 - 200 = b$ ;  $b = 60$ .

Otra forma de resolverlo: (I) + (III) - (II)

$$a + b + b + c - (a + b + c) = 90 + 170 - 200 \Rightarrow b = 60.$$

4. Cada uno de los números 1, 5, 6, 7, 13, 14, 17, 22, 26 se coloca en un círculo distinto en la figura de abajo. Los números 13 y 17 se colocan tal como se muestra.



Toño calcula el promedio de los números en los tres primeros círculos, el promedio de los números en los tres círculos de en medio y el promedio de los números en los tres últimos círculos. Estos tres promedios son iguales. ¿Cuál es el número que se colocó en el círculo sombreado?

**Respuesta: 7**

Solución: Como los tres promedios son iguales, y todos son promedios de tres números (de ahora en adelante les diremos tercias de números), entonces la suma de cada una de las tercias de números también debe ser igual. Es decir, que los números en los primeros tres círculos, suman lo mismo que los números en los tres círculos de en medio y que los números en los tres últimos círculos. Ahora bien, como esas tercias de números deben de abarcar los 9 números (pues cada uno se colocará en un círculo), la suma de los 9 números debe ser igual a la suma de la suma de cada tercia, por lo tanto, debe de ser el triple del valor de la suma de cada tercia (puesto que son tres tercias y las tres suman lo mismo). De aquí, que la suma de los números en los tres círculos de en medio debe de ser  $(1 + 5 + 6 + 7 + 13 + 14 + 17 + 22 + 26) / 3 = 111 / 3 = 37$ . Por lo tanto,  $13+17+$  el número en el círculo gris debe de dar como resultado 37. Por lo tanto, la respuesta es  $37-13-17=7$ .

5. La siguiente figura está formada por triángulos equiláteros. Si el área del triángulo blanco más grande es 64. ¿Cuánto mide el área sombreada?



**Respuesta: 108**

Solución: Un triángulo blanco grande es cuatro veces un triángulo blanco mediano. Un triángulo blanco mediano es cuatro veces un triangulito blanco más pequeño, es decir, el triángulo blanco grande es 16 veces un triangulito blanco más pequeño. Un triangulito blanco más pequeño es igual a un triangulito negro, por tanto, el triángulo blanco grande es 16 veces un triangulito negro, o sea el triangulito negro tiene área 4. Hay 27 triangulitos negros que tienen un área total de  $27 \times 4 = 108$ .

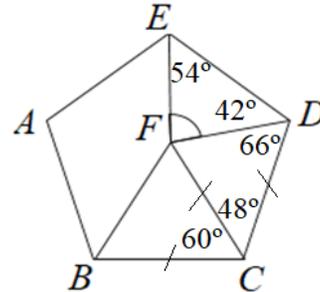
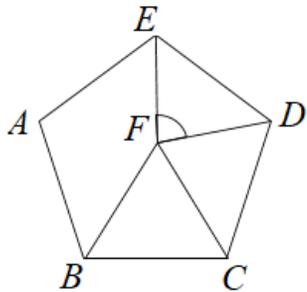
6. En esta suma, letras diferentes representan cifras diferentes. ¿Cuánto vale la suma  $T + Q + M$ ?

$$\begin{array}{r} M \ T \ Q \\ + \ M \ Q \ T \\ \hline T \ Q \ M \end{array}$$

**Respuesta: 18**

Solución: De la primera columna deducimos que  $Q + T$  es  $M$  o  $10 + M$ . Como en la segunda aparece nuevamente  $T + Q$  y el resultado no es  $M$ , deducimos que en la primera suma llevamos una unidad a las decenas y por tanto  $T = 9$ . La suma de las centenas nos dice que  $M = 4$ , y volviendo a las unidades  $Q = 5$ . Por lo tanto,  $T + Q + M = 18$ .

7. Se tiene un pentágono regular  $ABCDE$  con un punto dentro de él de tal manera que el triángulo  $BCF$  es equilátero, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo  $\angle DFE$ ?



**Respuesta: 84**

Solución: Como  $BCF$  es equilátero, sus ángulos internos miden  $60^\circ$ . Como  $ABCDE$  es pentágono regular, sus ángulos internos miden  $108^\circ$ . Luego el ángulo  $\angle DCF$  mide  $108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ . Como el triángulo  $DCF$  tiene dos lados iguales ( $DC = BC$  por ser lados del pentágono y  $BC = CF$  por ser lados del triángulo equilátero), entonces  $DFC$  es un triángulo isósceles y los ángulos  $\angle DFC$  y  $\angle FDC$  son iguales y deben valer  $(180^\circ - 48^\circ) / 2 = 132^\circ / 2 = 66^\circ$ . Luego  $\angle FDE$  debe medir  $108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$ . Luego observemos que, por simetría de la figura,  $FE$  biseca al ángulo  $\angle DEA$ , entonces  $\angle FED = 108^\circ / 2 = 54^\circ$ . Luego los ángulos internos del triángulo  $DEF$  son  $42^\circ$ ,  $54^\circ$  y el tercero es el ángulo deseado  $\angle DFE$ . Como los ángulos internos de un triángulo suman  $180^\circ$ ,  $\angle DFE$  debe de ser  $180^\circ - 54^\circ - 42^\circ = 84^\circ$ .

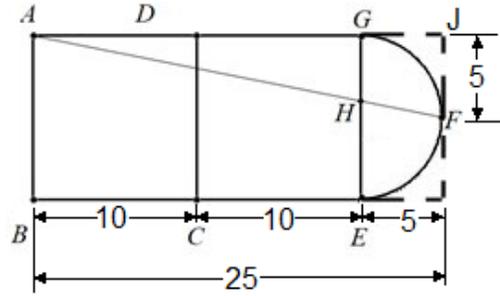
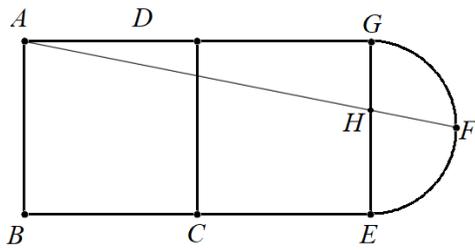
8. El número  $25^{64} \times 64^{25}$  es el cuadrado de un entero positivo  $N$ . ¿Cuál es la suma de los dígitos de  $N$ ?

**Respuesta: 14**

Solución: Para que un número sea un cuadrado debe tener sus factores elevados a una potencia par. Luego  $(25)^{64} \times (64)^{25} = (5^2)^{64} \times (2^6)^{25} = 5^{128} \times 2^{150} = (5 \times 2)^{128} \times 2^{22} = 10^{128} \times 2^{22}$ .

Por lo que la raíz cuadrada es  $N = 10^{64} \times 2^{11}$ . De esta forma el número  $N$  termina en 64 ceros que no contribuyen a la suma de las cifras. Entonces la suma de las cifras de  $N$  es igual a la suma de las cifras de  $2^{11} = 2048$ , es decir,  $2 + 0 + 4 + 8 = 14$ .

9. En la figura  $ABCD$  y  $DCEG$  son cuadrados de lado  $10 \text{ cm}$ ,  $EFG$  es un semicírculo con  $F$  en el punto medio del arco  $GE$  y  $H$  es la intersección de las líneas  $AF$  y  $EG$ . ¿Cuál es el área, en  $\text{cm}^2$ , del triángulo  $AHG$ ?



**Respuesta 40**

Solución: Con unos trazos en la figura, nos damos cuenta que los triángulos  $AJF$  y  $AGH$  son semejantes, por tanto, se debe cumplir que  $\frac{AG}{AJ} = \frac{GH}{JF}$ , es decir,  $\frac{20}{25} = \frac{GH}{5}$ , por tanto  $GH = 4$ , que es la base del triángulo  $AGH$  cuya altura es 20. Por tanto, el área pedida es  $4 \times 20 / 2 = 40 \text{ cm}^2$ .

**10.** José tiene pollos y cabras. El total de ojos de los animales es de 498, y el total de patas son 594. ¿Cuántas cabras tiene?

**Respuesta: 48 cabras.**

Solución: José tiene 249 animales, porque es la mitad del número de ojos. Si a todos los parara en dos patas, habría 498 patas en el piso y quedarían 96 patas en el aire que serían dos de cada cabra, es decir, hay 48 cabras (y  $249 - 48 = 201$  pollos).

**11.** En la igualdad  $m^4 = 5400n$ , tanto  $m$  como  $n$  son números enteros positivos. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tener el número  $n$ ?

**Respuesta 150**

Solución:  $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ . Para ser una cuarta potencia hace falta multiplicar por  $2 \times 3 \times 5^2 = 150$

**12.** Se pinta un cubo con 6 colores, utilizando un color para cada cara. ¿De cuántas maneras diferentes puede pintarse? Nota: dos maneras son iguales si, mediante giros, se pueden ver iguales desde cualquier parte.

**Respuesta 30.**

Solución: Como siempre habrá los seis colores en todos los cubos-, elijamos uno de ellos -el que sea, por ejemplo, el blanco si es que lo hay- para pintar la cara de abajo. Así, para pintar la parte de arriba tenemos cinco posibilidades. Las restantes cuatro caras laterales se pintan con los cuatro colores restantes. En teoría serían cuatro maneras para pintar una de las caras sin embargo, siempre puedo elegir uno de esos colores para pintar la cara que me queda al frente (y si no está al frente, puedo girarlo horizontalmente, sin que cambien de lugar los colores elegidos abajo y arriba) y faltarán tres caras para pintar con los tres colores restantes: hay tres maneras para pintar la cara del lado derecho; y quedan dos colores para elegir con cual pintar la cara de atrás; por último, sólo queda un color para pintar la última cara. Así las posibilidades son 1 para abajo; 5 para arriba, 1 para el frente; 3 para la derecha; 2 para la de atrás y una para la izquierda. En total  $1 \times 5 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 30$ .