<u>Tercer Examen Selectivo, 12 de octubre de 2019, UAA</u>

Problema 1

Sea S un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tal que las sumas formadas añadiendo cada par de números distintos de S son todas diferentes. Por ejemplo, el subconjunto $= \{1, 2, 3, 5\}$ cumple esta propiedad, pero $= \{1, 2, 4, 5\}$ no, pues los pares $\{1, 5\}$ y $\{2, 4\}$, tienen la misma suma, que es 5. ¿Cuál es la máxima cantidad de elementos que puede contener S?

Problema 2

Encuentre todos los números primos p y q, tales que $p^2 + q^2 - 1$ es divisible entre $p + q + 1$

Problema 3

Sea ABC un triángulo escaleno. La línea que pasa por el vértice A del triángulo ABC y que es paralela al lado BC, interseca al circuncírculo de ABC por segunda vez en el punto A_1. Los puntos B_1 y C_1 se definen de manera similar con respecto a los otros vértices. Demuestra que la línea perpendicular a BC desde A_1, la línea perpendicular a CA desde B_1 y la línea perpendicular a AB desde C_1 concurren en un sólo punto.

Cuarto Examen Selectivo, 13 de octubre de 2019, UAA

Problema 4

Encuentra la cantidad de valores distintos que puede tomar la expresión

$$\frac{n^2-2}{n^2-n+2}$$

si n puede ser un número entero entre 1 y 100 (inclusive).

Problema 5

Sea ABC un triángulo. La bisectriz interna del ángulo $< ABC$ interseca a AC en P. Demuestra que si $AP + AB = CB$, entonces API es un triángulo isósceles.

Problema 6

Sean m y n dos enteros positivos. Un tablero de $2m \times 2n$ casillas, se colorea como un tablero de ajedrez. Encuentra el número de formas de colocar mn fichas en las casillas blancas, a lo más una ficha por casilla, de tal forma que no hay dos fichas que estén en casillas del tablero que sean adyacentes diagonalmente. Dos casillas son adyacentes diagonalmente si se tocan exactamente en una esquina. Un ejemplo de una manera de colocar las fichas cuando $m = 2$ y $n = 3$ se muestra en la figura.