Explanada del Museo Descubre, 23 y 24 de Noviembre de 2019

Soluciones Semifinal

Set 1 - Problema 1

Una de las caras de un prisma rectangular tiene área de $27\ cm^2$. Otra cara tiene área de $32\ cm^2$. Si el volumen del prisma es de $144\ cm^3$, determine el área de la superficie del prisma en cm^2.

Respuesta: $166\ cm^2$

Solución: Si a, b y c son las longitudes del alto, ancho y profundidad del prisma, respectivamente, entonces tenemos que:

$$ab = 27,\ bc = 32,\ abc = 144$$

Luego $c = \frac{abc}{ab} = \frac{144}{27} = \frac{16}{3}$ y $a = \frac{abc}{bc} = \frac{144}{32} = \frac{9}{2}$ y finalmente usando esos dos valores $b = \frac{abc}{ac} = \frac{144}{\frac{16}{3} \times \frac{9}{2}} = 6$. De aquí ya es fácil calcular el área de cada cara del prisma, multiplicando cada pareja de las longitudes, y multiplicando por dos (pues son dos caras de cada tipo), obteniendo $\frac{16}{3} \times 6 = 32$, $\frac{9}{2} \times 6 = 27$ y $\frac{16}{3} \times \frac{9}{2} = 24$, dando como resultado un área de la superficie de $2(32 + 27 + 24) = 166$.

Soluciones Semifinal

Set 1 - Problema 2

Suponga que $\frac{2^{2022}+2^{a}}{2^{2019}}=72$. Determine el valor de a.

Respuesta: 2025

Solución: Usando las leyes de los exponentes en la división se obtiene que

$$\frac{2^{2022}+2^{a}}{2^{2019}}=72 \Rightarrow 2^{3}+2^{(a-2019)}=72 \Rightarrow 2^{(a-2019)}=64=2^{6} \Rightarrow a-2019=6 \Rightarrow a=2025$$

Soluciones Semifinal

Set 1 - Problema 3

La línea con la ecuación $y = mx + 2$ intersecta a la parábola con la ecuación $y = ax^2 + 5x - 2$ en los puntos $P(1,\ 5)$ y Q. Determina las coordenadas del punto Q.

Respuesta: $Q = (-2, -4)$

Solución: Como el punto P está en ambas ecuaciones, entonces debe de cumplir ambas ecuaciones. Por lo tanto usando la ecuación de la recta $y = mx + 2 \Rightarrow 5 = m(1) + 2 \Rightarrow 5 = m + 2 \Rightarrow m = 3$. Luego hacemos lo mismo con la ecuación de la parábola $5 = a(1^2) + 5(1) - 2 \Rightarrow 5 = a + 3 \Rightarrow a = 2$. Finalmente, para encontrar el segundo punto de intersección de la línea y la parábola igualamos sus ecuaciones (una solución deberá ser el punto P): $3x + 2 = 2x^2 + 5x - 2 \Rightarrow 0 = 2x^2 + 2x - 4 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2$ y resolviendo esa ecuación cuadrática (por el método que ustedes prefieran) se obtienen las soluciones $x = 1 \rightarrow y = 5$ y $x = -2 \rightarrow y = -4$, siendo esta segunda entonces el punto Q.

Soluciones Semifinal

Set 2 - Problema 1

Se tienen 3 números A, B y C, de tal forma que $1001C - 2002A = 4004$, y $1001B + 3003A = 5005$. ¿Cuánto vale el promedio de A, B y C?

Respuesta: 3

Solución: Sumando ambas ecuaciones se obtiene que $1001C - 2002A + 1001B + 3003A = 4004 + 5005$.

Simplificando se llega a $1001C + 1001B + 1001A = 9009$ y dividiendo entre 1001 obtenemos que $A + B + C = 9$, por lo tanto su promedio es $\frac{A+B+C}{3} = 3$.

Soluciones Semifinal

Set 2 - Problema 2

Sea $N = 100...0024$, donde N tiene exactamente 2019 ceros entre el 1 y el 2. Encuentra la mayor potencia de 2 tal que N es divisible por esa potencia de 2.

Respuesta: 8

Solución: Veamos que el número cumple el criterio de divisibilidad del 8 (sus últimas tres cifras forman un número divisible entre 8). Además notemos que $100...00$ es divisible entre 16 (basta con empezar a hacer la división y ver que da $62500...00$), pero el 24 no, entonces el número no puede ser divisible entre 16, y por lo tanto la mayor potencia de dos que lo divide es el 8.

Set 2 - Problema 3

El primer y segundo término de una secuencia de números son 4 y 5, respectivamente. Cada término después del segundo término es determinado de la siguiente forma: Se suma 1 al término anterior y al resultado se le divide entre el término anterior a ese. Por ejemplo, el tercer término es igual a $\frac{5+1}{4}$.¿Cuál es el término 2020^{vo} de la secuencia de números?

Respuesta: 1

Solución: Se calculan los primeros términos de la secuencia:

$$4,\ 5,\ \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},\ \frac{\frac{3}{2}+1}{5} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1,\ \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4,\ \frac{4+1}{1} = 5, ...$$

Ahora notamos que el siguiente término de la secuencia está determinado por los dos anteriores, y si observamos en los valores calculados, el 4 y 5 se repiten, por lo cual la secuencia de números se tendrá que repetir a partir de este punto. Por lo tanto, se repetirá cada 5 elementos, entonces el 2020^{vo} término deberá de ser el quinto elemento de la secuencia, es decir, el 1.

Set 3 - Problema 1

Si N es un entero positivo tal que $\sqrt{12}+\sqrt{108}=\sqrt{N}$, determine el valor de N.

Respuesta: 192

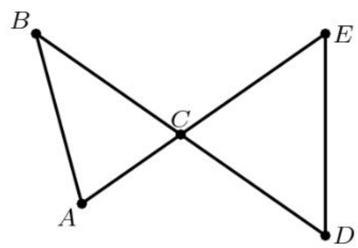
Solución: Usando las leyes de los radicales y agrupando términos, $\sqrt{12}+\sqrt{108}=\sqrt{12}+\sqrt{9\times 12}=\sqrt{12}+\sqrt{9}\sqrt{12}=\sqrt{12}+3\sqrt{12}=4\sqrt{12}=\sqrt{192}$

Por lo tanto $N=192$

Soluciones Semifinal

<u>Set 3 - Problema 2</u>

Los segmentos BD y AE se intersectan en C, como se muestra en la figura, además $AB = BC = CD = CE$, y $\angle A = \frac{5}{2}\angle B$. ¿Cuánto mide <u>el doble</u> del ángulo $\angle D$?



Respuesta: 105º

Solución: Se hacen cuentitas con los ángulos, usando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º y que los ángulos <ACB y <ECD son iguales por ser opuestos por vértice. <B+<A+<C=180º por ser ángulos internos de un triángulo, pero además <A=<C por ser AB=BC y el triángulo ABC isósceles. Luego entonces 180ª=<A+<B+<C= $\frac{5}{2}$ <B+<B+ $\frac{5}{2}$ <B= 6<B. De aquí se obtiene que <B=30º y <A=<C=75º. Luego, como <D=<E por ser CD=CE, y como suman 180º con <C, entonces tenemos que <D+<E+<C=180º y entonces <D+<D+75º=180º y entonces 2<D=105º

Soluciones Semifinal

Set 3 - Problema 3

Suponga que n es un entero positivo y que a es un entero con $a = \frac{10^{2n}-1}{3(10^n+1)}$. Si la suma de los dígitos de a es 567, ¿cuál es el valor de n?

Respuesta: 189

Solución: Los números de la forma $10^k - 1$ son números que se ven así $99...99$ con k nueves. Por lo tanto $a = \frac{10^{2n}-1}{3(10^n+1)} = \frac{99...999}{3(10...001)}$ donde el número de arriba tiene 2n nueves y el de abajo tiene n-1 ceros. Se puede ver que $\frac{99...999}{10...001} = 99...999$ con n dígitos 9, por lo que $a = 33...333$ y la suma de sus cifras debe de ser $3n = 567$, entonces $n = \frac{567}{3} = 189$

Solución alternativa: Se factoriza el término de arriba utilizando diferencia de cuadrados, $a = \frac{10^{2n}-1}{3(10^n-1)} = \frac{(10^n)^2-1^2}{3(10^n-1)} = \frac{(10^n-1)(10^n+1)}{3(10^n+1)} = \frac{10^n-1}{3}$, se concluye igual que en la solución anterior.