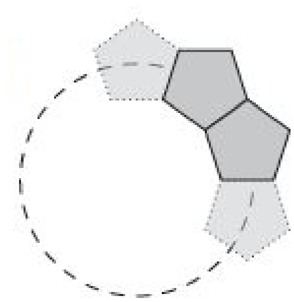
Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 1 - Problema 1

Ramón tiene piezas de plástico iguales, con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en círculo, como en la figura ¿Cuántas piezas necesita para cerrar el círculo? Justifica tu respuesta.



Respuesta: 10

Solución: Sabemos que la suma de los ángulos internos de un pentágono es $540°$, por lo tanto su ángulo interno debe de medir $\frac{540°}{5} = 108°$. Luego entonces, cada pentágono está rotando su base (hablando del lado que es lado interno de la cadena formada) en exactamente $36°$. Ahora, para regresar a su posición original, deberá llegar a completar $360°$, es decir, volver a poner su base horizontal, lo cual logrará al poner 10 pentágonos.

Solución alternativa: Para terminar el problema, sabemos que la suma de los ángulo internos de un n-ágono regular es $180°(n-2)$, por lo tanto, como pretendemos que dos ángulos $108°$ y el interno del n-ágono regular completen 360°, el ángulo interno debe de medir 144°, por lo cual $180(n-2) = 144n$. Resolviendo la ecuación nos deja $n = 10$ como solución.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 1 - Problema 2

Suponga que la línea con la ecuación $x+y=42$ es tangente al círculo con la ecuación $x^2+y^2=a$. ¿Cuánto vale a? Justifica tu respuesta.

Respuesta: 882

Solución: Como la recta $x+y=42$ corta al eje X en (0,42) y (42,0), entonces el punto más cercano de la recta al origen (y por ende, el punto de tangencia que se solicita) es el punto (21,21), lo cual significa que ese punto está sobre la circunferencia, entonces $21^2+21^2=a$. Entonces $a=882$

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 1 - Problema 3

Respuesta: 3

Solución: Podemos despejar a x de la primera ecuación, obteniendo $x = 3 - 3y$ y sustituirlo en la segunda ecuación. Posteriormente, resolveremos $||3 - 3y| - |y|| = 1$. Hay 4 casos:

$3 - 3y$	y	**Solución**
Positivo o cero - $y \leq 1$	Positivo o cero - $y \geq 0$	$\|3 - 3y - y\| = 1 \Rightarrow$ a) $3 - 3y - y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ b) $3 - 3y - y = -1 \Rightarrow y = 1$
Positivo o cero - $y \leq 1$	Negativo - $y < 0$	$\|3 - 3y + y\| = 1 \Rightarrow$ a) $3 - 3y + y = 1 \Rightarrow y = 1 \star$ b) $3 - 3y + y = -1 \Rightarrow y = 2 \star$
Negativo - $y > 1$	Positivo o cero - $y \geq 0$	$\|3y - 3 - y\| = 1 \Rightarrow$ a) $3y - 3 - y = 1 \Rightarrow y = 2$ b) $3y - 3 - y = -1 \Rightarrow y = 1 \star$
Negativo - $y > 1$	Negativo - $y < 0$	Las condiciones se contradicen, no hay solución

Es claro que cada solución en y genera una solución en x, entonces en total son 3 soluciones.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

<u>Set 2 - Problema 1</u>

¿Cuántos enteros positivos n hay, tales que tanto $\frac{n}{3}$ como $3n$ sean números enteros de tres cifras? Justifica tu respuesta.

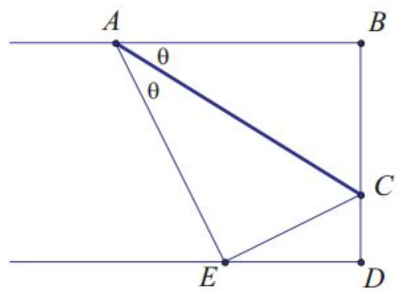
<u>**Respuesta:** 12</u>

<u>Solución:</u> Para que un entero positivo dividido entre 3 dé un número de tres cifras, debe de ser al menos 300. Para que un entero positivo multiplicado por 3 dé un número de tres cifras, a lo más puede ser 333. Ahora, por último, n debe de ser múltiplo de 3, pues sino, no podrá ser dividido entre 3. Entre 300 y 333 hay 34 números, pero como ambos extremos del rango son múltiplos de 3, entonces habrá 12 números n que cumplan lo pedido.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 2 - Problema 2

En la figura se muestra una tira de papel rectangular. Una de sus esquinas ha sido doblada siguiendo la línea AC de tal forma que la esquina queda sobre el otro lado de la tira rectangular. Creando así un ángulo θ (<CAB en la figura). Dado que la tira tiene una altura de 30 cm (es decir, $BD = 30$ cm), y asumiendo que θ vale 30°, encuentra la longitud del segmento AC.



Respuesta: 40 cm

Solución: Notemos primero que los triángulos ABC y AEC son congruentes y son triángulos rectángulos. Luego por definición del seno, $AC\ sen\ \theta\ = BC$. Luego $< ACB = 90° - \theta =< ACE$ y por lo tanto $< ECD = 2\theta$. Luego $CD = CE\ cos\ 2\theta$ y en el triángulo ACE, $CE = AC\ sen\ \theta$. Finalmente, $30 = BD = BC + CD = (AC\ sen\ \theta) + (AC\ sen\ \theta\ cos\ 2\theta) = AC\ sen\ \theta\ (1 + cos\ 2\theta)$.
Sustituyendo $\theta = 30°$, tenemos que $sen\ 30°\ = \frac{1}{2}$ y $cos\ 60°\ = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $30 = AC(\frac{3}{4})$ y de aqu{i se concluye que $AC = 40$.

Solución alternativa: ABC tiene ángulos de 90-60-30 y ACE y CDE también, por lo cual AC=2CE, AC=2BC y CE=2CD (Usando el truquito de reflejar y completar un triángulo equilátero). Luego BC=2CD y como BD=30, entonces BC=20, luego AC=40.

<u>Set 2 - Problema 3</u>

Sean a, b y c tres números de un dígito, todos distintos. Sea S la suma de todas las soluciones de la ecuación $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$. ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tener $2S$?

<u>**Respuesta:** 33</u>

<u>Solución:</u> Se puede factorizar la ecuación por factor común obteniendo que $(x-b)(2x-a-c)=0$, de donde las soluciones deberán ser:

$$x-b=0 \Rightarrow x=b$$

$$2x-a-c=0 \Rightarrow x=\frac{a+c}{2}$$

Luego $2S=2b+a+c$, como son dígitos, a lo más puede tener cada uno valor 9, además como el b se suma dos veces, a él nos conviene ponerle el valor de 9. Entonces el valor máximo se alcanza con $b=9$, $a=8$, $c=7$, dando 33 como resultado.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 3 - Problema 1

Defina la operación $x \otimes y = x^3 - y$. ¿Cuánto vale $2019 \otimes (2019 \otimes 2019)$? Justifica tu respuesta.

Respuesta: 2019

Solución: $2019 \otimes 2019 = 2019^3 - 2019$;
$2019 \otimes (2019 \otimes 2019) = 2019 \otimes (2019^3 - 2019) = 2019^3 - (2019^3 - 2019) = 2019$, observando que evitamos calcular 2019^3 explicitamente.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 3 - Problema 2

Considera la función $f(x) = x^2 - 2x$. Determina cuántos números reales x satisfacen que $f(f(f(x))) = 3$.

Respuesta: 5

Solución: Primero veamos que se necesita para que $f(k) = 3$. Necesitamos que $k^2 - 2k = 3$, resolviendo, $k = -1$ o $k = 3$. por lo tanto si x cumple lo que queremos, $f(f(x)) = 3 \ o \ -1$

Veamos que necesitamos para que $f(k) = -1$. Necesitamos que $k^2 - 2k = -1$, resolviendo, queda $k = 1$ forzosamente. Es decir, que $f(x) = 1$

Para que para que $f(k) = 3$.Ya vimos que $k = -1$ o $k = 3$, por lo que $f(x) = 3 \ o \ -1$

Finalmente, para que $f(x) = 1$, se resuelve la ecuación cuadrática $x^2 - 2x = 1$ dando dos soluciones $\frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Para que $f(x) = 3$, $x = 3$ o $x = -1$

Y por último, para que $f(x) = -1$, vimos que sólo sirve $x = 1$. Entonces son 5 soluciones.

Respuestas y soluciones - Cuartos de Final

Set 3 - Problema 3

Se tienen dos hipérbolas distintas, pero con las mismas asíntotas y la misma excentricidad. Además el eje principal de una de las hipérbolas es perpendicular al eje principal de la otra hipérbola. Si e es la excentricidad de las hipérbolas. ¿Cuántos y cuáles valores distintos podría tener $\frac{1}{e^2}$? Justifica porque son todos los valores y en este problema deberás enlistarlos todos para que sea correcta la respuesta.

Respuesta: 1 valor, $\frac{1}{e^2} = 2$

Solución corta: La excentricidad de una hipérbola es igual a $cos\,\frac{x}{2}$ donde x es el ángulo entre sus asíntotas, por lo cual, como ambas hipérbolas tienen ángulos suplementarios, implica que $cos\,(\frac{x}{2}) = cos(\frac{180-x}{2})$, pero el coseno es único y no negativo en el rango 0°-90°, por lo cual, la única forma en que eso suceda es que $\frac{x}{2} = \frac{180-x}{2}$ es decir, que $x = 90°$. Es decir, que las asíntotas son perpendiculares, por lo cual la excentricidad tendría que ser $cos\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $\frac{1}{e^2} = 2$.

Otras soluciones: Considerar los valores $a,\ b,\ c$ de la hipérbola y hacer cuentitas o alguna consideración geométrica/algebraica para ver que por fuerza las asíntotas son perpendiculares.