

**Examen Selectivo para el Concurso Regional 2019**  
**Universidad Autónoma de Aguascalientes, 18 de agosto de 2019**

*Duración máxima: 4 horas y media      Tiempo de preguntas: 1 hora*  
*Escribe sólo por un lado de la hoja, no utilices una misma hoja para problemas distintos.*

**Problema 1**

¿Para qué números enteros positivos  $n$  se cumple que el mayor entero que es menor o igual a  $\frac{n^2}{3}$  es un número primo? Justifica tu respuesta.

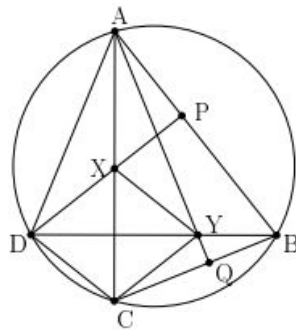
**Nota:** Por ejemplo, si  $n = 10$ , el mayor entero que es menor o igual a  $\frac{10^2}{3} = 33.333\dots$  es 33, el cual **no** es primo, por lo tanto  $n = 10$  **no** cumple.

**Problema 2**

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números enteros positivos que cumple que  $a_1 = 2019$ , y a partir del segundo término ( $n \geq 2$ ),  $a_n = 1 + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$ , es decir, el  $n$ -ésimo término de la sucesión es la suma de los  $n - 1$  términos anteriores, más 1. ¿Cuánto vale  $a_{2019}$ ? Justifica tu respuesta.

**Problema 3**

En la figura,  $ABCD$  es un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales se cortan en ángulo recto;  $P$  y  $Q$  son los respectivos pies de las perpendiculares desde  $D$  a  $AB$  y desde  $A$  a  $BC$ ;  $X$  es el punto de intersección de  $DP$  con  $AC$ , y  $Y$  es el punto de intersección de  $AQ$  con  $DB$ . Demostrar que el cuadrilátero  $DXYC$  es un rombo (es decir, es un paralelogramo con todos los lados de la misma longitud).



**Problema 4**

¿Para qué enteros positivos  $n$  puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con  $n$  escalones en vez de 4) con  $n$  cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?

