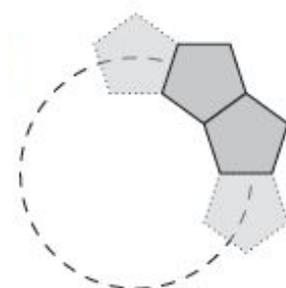


Explanada del Museo Descubre, 23 y 24 de Noviembre de 2019  
**Cuartos de final**

**Set 1**

**Problema 1**

Ramón tiene piezas de plástico iguales, con la forma de un pentágono regular. Las va disponiendo en círculo, como en la figura ¿Cuántas piezas necesita para cerrar el círculo? Justifica tu respuesta.



**Problema 2**

Suponga que la línea con la ecuación  $x + y = 42$  es tangente al círculo con la ecuación  $x^2 + y^2 = a$ . ¿Cuánto vale  $a$ ? Justifica tu respuesta.

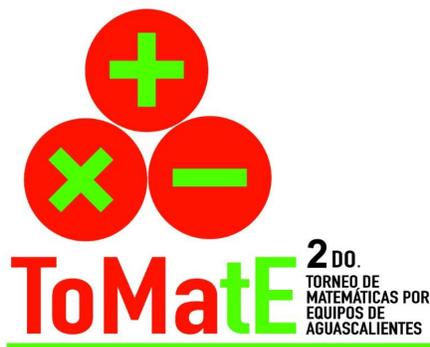
**Problema 3**

¿Cuántas parejas de números reales  $(x, y)$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones? Debes justificar porque son todas.

$$x + 3y = 3$$

$$||x| - |y|| = 1$$

Donde  $|z|$  significa el valor absoluto de  $z$ , es decir, si un número es positivo o cero  $|z| = z$  y si el número  $z$  es negativo  $|z| = -z$



Explanada del Museo Descubre, 23 y 24 de Noviembre de 2019  
**Cuartos de final**

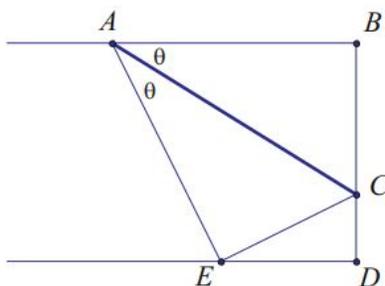
**Set 2**

**Problema 1**

¿Cuántos enteros positivos  $n$  hay, tales que tanto  $\frac{n}{3}$  como  $3n$  sean números enteros de tres cifras? Justifica tu respuesta.

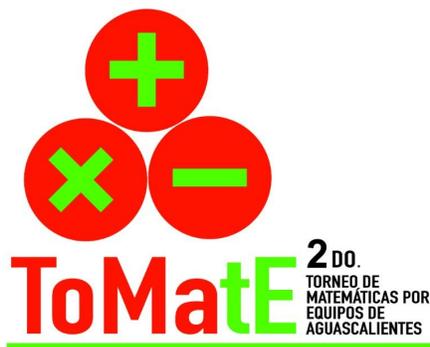
**Problema 2**

En la figura se muestra una tira de papel rectangular. Una de sus esquinas ha sido doblada siguiendo la línea  $AC$  de tal forma que la esquina queda sobre el otro lado de la tira rectangular. Creando así un ángulo  $\theta$  ( $\angle CAB$  en la figura). Dado que la tira tiene una altura de 30 cm (es decir,  $BD = 30$  cm), y asumiendo que  $\theta$  vale  $30^\circ$ , encuentra la longitud del segmento  $AC$ .



**Problema 3**

Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  tres números de un dígito, todos distintos. Sea  $S$  la suma de todas las soluciones de la ecuación  $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$ . ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tener  $2S$ ?



*Explanada del Museo Descubre, 23 y 24 de Noviembre de 2019*  
**Cuartos de final**

**Set 3**

**Problema 1**

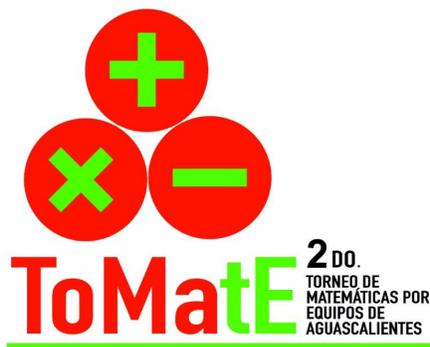
Defina la operación  $x \otimes y = x^3 - y$ . ¿Cuánto vale  $2019 \otimes (2019 \otimes 2019)$ ? Justifica tu respuesta.

**Problema 2**

Considera la función  $f(x) = x^2 - 2x$ . Determina cuántos números reales  $x$  satisfacen que  $f(f(f(x))) = 3$ .

**Problema 3**

Se tienen dos hipérbolas distintas, pero con las mismas asíntotas y la misma excentricidad. Además el eje principal de una de las hipérbolas es perpendicular al eje principal de la otra hipérbola. Si  $e$  es la excentricidad de las hipérbolas. ¿Cuántos y cuáles valores distintos podría tener  $\frac{1}{e^2}$ ? Justifica porque son todos los valores y en este problema deberás enlistarlos todos para que sea correcta la respuesta.



Explanada del Museo Descubre, 23 y 24 de Noviembre de 2019  
**Cuartos de final**

**Muerte súbita**

**Problema 1**

Se tiene una sucesión  $x_0, x_1, x_2, \dots$  Suponga que  $x_0 = 2019$ , y sea calcular sucesivamente los elementos de la sucesión  $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n}$  para  $n \geq 1$ . Calcule  $x_{2020}$ .

**Problema 2**

Sean  $p$  y  $q$  enteros positivos tales que

$$\frac{5}{9} < \frac{p}{q} < \frac{4}{7}$$

y  $q$  tiene el menor valor posible. ¿Cuánto vale  $q$ ? Justifica por qué es el menor valor posible de  $q$ .

**Problema 3**

El siguiente rectángulo  $ABCD$  de  $8 \times 18$  se parte en dos piezas hexagonales congruentes como se muestra en la figura, de tal forma que las dos piezas hexagonales pueden acomodarse sin traslaparse para formar un cuadrado. ¿Cuánto vale  $y$ ?

