Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 3

Factorización

Problemas

1. El producto de las edades de Pedro, su hijo y su nieto es 2014. ¿A qué edad tuvo el hijo de Pedro a su hijo?
2. Encuentra todos los pares (x, y) tales que $xy = 14 + 3x + 2y$
3. Supongamos x un número real tal que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2013}$. ¿Cuánto es $x^2 + \frac{1}{x^2}$?
4. Si a, b son números reales tales que $a + b = 7$ y $ab = 5$, ¿Cuánto es $a^3 + b^3$?
5. Factoriza $n^4 - 22n^2 + 9$
6. Supongamos que p, q son números reales tales que $p + q = 6$ y $p^{-1} + q^{-1} = \frac{3}{2}$. ¿Cuánto vale $p^2 + q^2$?
7. Encuentra todos los posibles valores de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ dado que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$
8. Demuestra que si a es la suma de dos cuadrados, $2a$ también lo es
9. Factoriza $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$
10. Factoriza $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

Problemas más interesantes

1. Demuestra que 121 nunca divide a $n^2 + 3n + 5$, para ningún entero positivo n
2. (USSR Problem Book) Demuestra que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible por 7
3. Si x, y y z son números reales tales que $x \neq y$ y $x^2(y + z) = y^2(x + z) = 2$. Determine el valor de $z^2(x + y)$.
4. Prueba que $n^5 + n^4 + 1$ no es primo para $n > 1$
5. (1987 AIME) Sean m, n enteros tales que $m^2 + 3m^2n^2 = 30n^2 + 517$. Encontrar $3m^2n^2$
6. (BMO, Ronda 2, 2005) Si N es un entero positivo y hay exactamente 2005 pares ordenados (x, y) de enteros positivos que satisfacen:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$$
Prueba que N es un cuadrado perfecto.