

## Problemas Divisores y Número de divisores 26/06/2019

### Divisores y múltiplos

- P1.** Encuentre la cantidad de múltiplos de 11 en la sucesión: 99, 100, 101, 102,  $\dots$ , 2013.
- P2.** Determina cuántos enteros positivos dividen a  $5^8 + 2 \times 5^9$ .
- P3.** Sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  cuatro números primos distintos tales que  $2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162$ ,  $11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162$ . Encuentra todos los posibles valores del producto  $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$ .
- P4.** Sea A el conjunto de los números naturales que satisface las siguientes tres propiedades: (1) ningún número de A es divisible entre 3, (2) ningún número de A es divisible entre 4 y (3) todos los números de A son divisibles entre 5. Si se ordenan los números de A de menor a mayor, ¿qué número ocupa el lugar 79?
- P5.** ¿Cuántos números con exactamente tres divisores hay entre el 1 y el 1000?
- P6.** Se tiene una fila de focos numerados del 1 al 2010. Inicialmente se encuentran todos apagados. Se realiza el siguiente proceso: primero se cambia el estado del foco con el número 1 así como el de todos sus múltiplos. A continuación se le cambia el estado al foco 2 y el de todos sus múltiplos. Luego el del 3 y todos sus múltiplos, y así sucesivamente hasta que se llega al foco 2010 y se le cambia a éste su estado. ¿Cuántos focos terminan prendidos al final del proceso?
- P7.** Sea n un entero positivo y sean  $a < b < c < d$  los cuatro divisores positivos más pequeños de n. Determine todos los enteros n tales que  $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .
- P8.** ¿Cuántos polígonos regulares tienen ángulos internos cuya medida sea un número entero de grados?
- P9.** Sea N un número entero positivo y a, b, c, d los cuatro divisores positivos más pequeños de N, en donde  $a < b < c < d$ . Encuentra todos los valores posibles de N para los cuales  $N = b \times c + d$ .
- P10.** Encuentra la menor pareja de números enteros consecutivos tales que cada uno tiene exactamente 6 divisores.
- P11.** Escribe todos los divisores positivos del 168
- P12.** ¿Cuántos divisores tiene el número 96?
- P13.** Determina cuántos enteros positivos dividen a  $5^8 + 2 \times 5^9$
- P14.** ¿Cuántos divisores tiene el número 25? ¿Y el número 100? Demuestra que la única forma en que puede un número tener una cantidad impar de divisores, es que el número sea un cuadrado perfecto.
- P15.** ¿Cuántos números dividen a 360?
- P16.** Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos  $a_i$  que tienen exactamente 3 divisores:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  ¿Qué número es  $a_6$ ?
- P17.** Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos  $a_i$  que tienen exactamente 7 divisores:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$  ¿Qué número es  $a_3$ ?
- P18.** ¿Cuántos divisores tiene el  $10!$ ?
- P19.** ¿Cuánto vale la multiplicación de los divisores del  $10!$ ?
- P20.** ¿Cuánto es la suma de los divisores de  $10!$ ?
- P21.** Demuestra que el número de divisores de un número N, siempre es menor o igual a  $2\sqrt{N}$ .
- P22.** Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.
- P23.** Encuentra la mayor cantidad de números consecutivos tales que cada uno tiene exactamente 4 divisores

### Otros

- P1.** Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.
- P2.** Sean a, b, c, d, e enteros positivos que satisfacen  $5a = 4b = 3c = 2d = e$  y  $k = a + 2b + 3c + 4d + 5e$ . Encuentra el menor valor que puede tomar k.
- P3.** Encuentra el mayor entero menor a 10000 que es cubo y cuadrado perfecto a la vez. Por ejemplo, 64 es cubo y cuadrado perfecto pues  $64 = 4^3$  y  $64 = 8^2$ .
- P4.** ¿Cuál es el mayor n tal que  $\frac{2010!}{7^n}$  es un entero?
- P5.** ¿Existe algún entero n tal que n! termine en exactamente 11 ceros en su representación decimal?
- P6.** Encuentra el menor entero positivo tal que el producto de sus cifras es 189000.
- P7.** Encuentra el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2004 y el producto de sus cifras es  $2^{753}$ .
- P8.** ¿Cuánto suman los últimos 2005 dígitos del número  $2004^{2005} \times 2005^{2004}$ ?
- P9.** Tres hermanos heredan n piezas de oro, con pesos 1, 2, 3...n. ¿Para qué n pueden repartirse las piezas?
- P10.** Encuentra una infinidad de enteros tales que la suma de sus dígitos es igual al producto de ellos.
- P11.** Se eligen 128 potencias de 2. Demuestra que hay dos cuya diferencia es múltiplo de 1000.
- P12.** ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos hay tal que el producto de sus dígitos es 2000?
- P13.** ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de  $11^{2010}$ ?