

## Problemas Divisores, Número de divisores y Criterios de Divisibilidad 24/06/2019

### Misceláneos

- P1.** Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.
- P2.** Sean  $a, b, c, d, e$  enteros positivos que satisfacen  $5a = 4b = 3c = 2d = e$  y  $k = a + 2b + 3c + 4d + 5e$ . Encuentra el menor valor que puede tomar  $k$ .
- P3.** Encuentra el mayor entero menor a 10000 que es cubo y cuadrado perfecto a la vez. Por ejemplo, 64 es cubo y cuadrado perfecto pues  $64 = 4^3$  y  $64 = 8^2$ .
- P4.** ¿Cuál es el mayor  $n$  tal que  $\frac{2010!}{7^n}$  es un entero?
- P5.** ¿Existe algún entero  $n$  tal que  $n!$  termine en exactamente 11 ceros en su representación decimal?
- P6.** Encuentra el menor entero positivo tal que el producto de sus cifras es 189000.
- P7.** Encuentra el menor entero positivo tal que la suma de sus cifras es 2004 y el producto de sus cifras es  $2^{753}$ .
- P8.** ¿Cuánto suman los últimos 2005 dígitos del número  $2004^{2005} \times 2005^{2004}$ ?
- P9.** Tres hermanos heredan  $n$  piezas de oro, con pesos 1, 2, 3... $n$ . ¿Para qué  $n$  pueden repartirse las piezas?
- P10.** Encuentra una infinidad de enteros tales que la suma de sus dígitos es igual al producto de ellos.
- P11.** Se eligen 128 potencias de 2. Demuestra que hay dos cuya diferencia es múltiplo de 1000.
- P12.** ¿Cuántos números enteros positivos de 5 dígitos hay tal que el producto de sus dígitos es 2000?
- P13.** ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de  $11^{2010}$ ?

### Criterios de divisibilidad y Expansión decimal

- P14.** Sólo uno de los números 234, 2345, 23456, 234567, 2345678, 23456789 es primo. ¿Cuál de ellos es?
- P15.** ¿Puede un número con 100 dígitos iguales a 0, 100 dígitos iguales a 1 y 100 dígitos iguales a 2 ser un cuadrado perfecto?
- P16.** Un número de 6 dígitos está representado por el número 1vwxyz, donde 1, v, w, x, y, z son sus dígitos. Si este número se multiplica por 3 se obtiene el número vwxyz1. Encuentra dicho número.
- P17.** ¿Para cuántos valores enteros positivos de  $n$  la expresión  $\frac{18}{n+4}$  es un entero?
- P18.** Encuentra los dígitos  $c$  y  $d$  tales que hacen verdadera la expresión  $2^c 9^d = 2c9d$ , donde  $2c9d$  representa un número de cuatro dígitos.
- P19.** Demuestra los criterios de divisibilidad del 4, 5 y 10.
- P20.** Sean  $p$  y  $q$  números primos distintos. Demuestre que un entero es divisible entre  $pq$  si y sólo si es divisible entre  $p$  y entre  $q$ . Deduzca los criterios de divisibilidad entre 6 y entre 10.
- P21.** Determine todos los enteros positivos  $n$  tales que 101 es divisor de  $111 \dots 1$ , donde  $111 \dots 1$  es el número formado por  $n$  cifras uno.
- P22.** ¿Cuál es el menor entero positivo formado sólo por dígitos 1 y 0 que es divisible entre 15?
- P23.** Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falsa: La suma de las cifras del número es 6, dos de las cifras del número son iguales, el número es menor que 110, el número es mayor que 40, el número es primo. ¿Cuál es el número de mi casa?
- P24.** ¿Qué valor debe tener la cifra "M" en el número 5M8M para que sea divisible entre 2 y 3 a la vez?
- P25.** ¿Cuántos números de 10 dígitos que contienen sólo ceros y unos son divisibles entre 9? (El primer dígito tiene que ser uno).
- P26.** Se sabe que el número A77C es divisible entre 12. Si A y C son distintos, halla los posibles valores de A y C.
- P27.** Al leer una nota de compra vi que por 72 pavos se pagó \*67,9\* pesos (la primera y última cifra se borraron). ¿Cuáles son los dígitos faltantes?
- P28.** A Julio le dieron el número secreto de su nueva tarjeta de crédito, y observó que la suma de los cuatro dígitos del número es 9 y ninguno de ellos es 0; además el número es múltiplo de 5 y mayor que 1995. ¿Cuál es la tercera cifra de su número secreto?
- P29.** Con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se forman enteros de dos cifras de manera que sean múltiplos de 15. ¿Cuántos enteros distintos se pueden formar?
- P30.** Sea  $N = 20172017 \dots 2017$ , el número formado al pegar 2017 veces el 2017. ¿Cuál es el número más cercano a  $N$  que es múltiplo de tres?

- P31.** Las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se usan para escribir un número abcdef de seis dígitos tal que abc es divisible entre 4, bcd es divisible entre 5, cde es divisible entre 3 y def es divisible entre 11. ¿Cuánto vale a?
- P32.** Escribe un número usando exactamente una vez cada dígito del 1 al 9, tal que el número determinado por cualesquiera dos dígitos consecutivos sea divisible entre 7 o 13.
- P33.** Se tiene que  $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x + 9x = a$ , donde a es un número que tiene todas sus cifras iguales. ¿Cuál es el menor valor positivo que puede tomar a?
- P34.** Justifica porque el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.
- P35.** En mi calculadora una de las teclas del 1 al 9 funciona mal: al apretarla aparece en la pantalla un dígito entre 1 y 9 que no es el que corresponde. Cuando traté de escribir el número 987654321, apareció en la pantalla un número divisible entre 11 y que deja resto 3 al dividirlo entre 9. ¿Cuál es la tecla descompuesta?

### Divisores y múltiplos

- P36.** Encuentre la cantidad de múltiplos de 11 en la sucesión: 99, 100, 101, 102,  $\dots$ , 2013.
- P38.** Determina cuántos enteros positivos dividen a  $5^8 + 2 \times 5^9$ .
- P39.** Sean  $p_1, p_2, p_3$  y  $p_4$  cuatro números primos distintos tales que  $2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162$ ,  $11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162$ . Encuentra todos los posibles valores del producto  $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$ .
- P40.** Sea A el conjunto de los números naturales que satisface las siguientes tres propiedades: (1) ningún número de A es divisible entre 3, (2) ningún número de A es divisible entre 4 y (3) todos los números de A son divisibles entre 5. Si se ordenan los números de A de menor a mayor, ¿qué número ocupa el lugar 79?
- P41.** ¿Cuántos números con exactamente tres divisores hay entre el 1 y el 1000?
- P42.** Se tiene una fila de focos numerados del 1 al 2010. Inicialmente se encuentran todos apagados. Se realiza el siguiente proceso: primero se cambia el estado del foco con el número 1 así como el de todos sus múltiplos. A continuación se le cambia el estado al foco 2 y el de todos sus múltiplos. Luego el del 3 y todos sus múltiplos, y así sucesivamente hasta que se llega al foco 2010 y se le cambia a éste su estado. ¿Cuántos focos terminan prendidos al final del proceso?
- P43.** Sea n un entero positivo y sean  $a < b < c < d$  los cuatro divisores positivos más pequeños de n. Determine todos los enteros n tales que  $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .
- P44.** ¿Cuántos polígonos regulares tienen ángulos internos cuya medida sea un número entero de grados?
- P45.** Sea N un número entero positivo y a, b, c, d los cuatro divisores positivos más pequeños de N, en donde  $a < b < c < d$ . Encuentra todos los valores posibles de N para los cuales  $N = b \times c + d$ .
- P46.** Encuentra la menor pareja de números enteros consecutivos tales que cada uno de ellos tiene exactamente 6 divisores.
- P47.** Escribe todos los divisores positivos del 168
- P48.** ¿Cuántos divisores tiene el número 96?
- P49.** Determina cuántos enteros positivos dividen a  $5^8 + 2 \times 5^9$
- P50.** ¿Cuántos divisores tiene el número 25? ¿Y el número 100? Demuestra que la única forma en que puede un número tener una cantidad impar de divisores, es que el número sea un cuadrado perfecto.
- P51.** ¿Cuántos números dividen a 360?
- P52.** Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos  $a_i$  que tienen exactamente 3 divisores:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$   
¿Qué número es  $a_6$ ?
- P53.** Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos  $a_i$  que tienen exactamente 7 divisores:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$   
¿Qué número es  $a_3$ ?
- P54.** ¿Cuántos divisores tiene el  $10!$ ?
- P55.** ¿Cuánto vale la multiplicación de los divisores del  $10!$ ?
- P56.** ¿Cuánto es la suma de los divisores de  $10!$ ?
- P57.** Demuestra que el número de divisores de un número N, siempre es menor o igual a  $2\sqrt{N}$ .
- P58.** Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.