Concurso Nacional de la 33 OMM

Ciudad de México, noviembre de 2019

Problema 1. Un número entero $m \geq 1$ es *mexica* si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es la cantidad de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números mexicas menores que 2019.
Nota. Los divisores de n incluyen a 1 y a n; por ejemplo $d(12) = 6$, ya que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos los divisores positivos de 12.

Solución. Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ es la factorización en primos de n, resulta que $d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$, por lo que $n^{d(n)} = (p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k})^{(\alpha_1+1)\dots(\alpha_k+1)}$. Notemos que para cada j se tiene que $n^{d(n)} \geq p_j^2$, luego para que $n^{d(n)} < 2019$, se debe tener que $p_j^2 < 2019$, es decir, $p_j < \sqrt{2019} < 45$.

Notemos que si $k \geq 3$, entonces $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) \geq 2^3 = 8$, luego $n^{d(n)} \geq (2 \cdot 3 \cdot 5)^8 > 2019$. Por lo tanto, $k \leq 2$, es decir n tiene a lo más dos factores primos. Veamos los tres casos.

- Caso 0. Si $k = 0$, entonces $n = 1$ y $d(1) = 1$ por lo que $m = 1^1 = 1$ es un número mexica.
- Caso 1. Si $k = 1$, es decir, n solamente tiene un factor primo, digamos p. Tenemos que $n^{d(n)} = (p^\alpha)^{\alpha+1}$, por lo que $n^{d(n)} \in \{p^2, p^6, p^{12}, \dots, p^{n(n+1)}, \dots\}$.
    - Si $p = 2$, entonces $2^6 < 2019$, pero $2^{12} > 2019$, entonces hay dos números con $p = 2$, que son $2^2 = 4$ y $2^6 = (2^2)^3 = 64$.
    - Si $p = 3$, entonces $3^6 < 2019$, pero $3^{12} > 2019$, entonces hay dos números con $p = 3$, que son $3^2 = 9$ y $(3^2)^3 = 729$.
    - Si $p = 5$, entonces $5^2 < 2019$, pero $5^6 > 2019$, entonces hay solo un número mexica con $p = 5$, que es 5^2. De la misma forma para los primos $7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$, solamente hay un número mexica.

  Por lo tanto, en este caso hay 16 números mexicas que son:

  2^2, $(2^2)^3$, 3^2, $(3^2)^3$, 5^2, $7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2$.
- Caso 2. Si $k = 2$, entonces $n^{d(n)} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)} \geq (p_1 p_2)^{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)} \geq (p_1 p_2)^4$. Notemos que $(2 \cdot 3)^4 = 1296$ es un número que cumple. Veamos que es el único en este caso. Si ambos primos son mayores que 2, entonces $n^{d(n)} \geq (3 \cdot 5)^4 = 50625 > 2019$. Si solo un primo es mayor que 2 (distinto de 3), entonces $n^{d(n)} \geq (2 \cdot 5)^4 = 10000 > 2019$. Por lo tanto, en este caso solamente $(2 \cdot 3)^4$ es un número mexica.

Por lo tanto, hemos encontrado todos los números mexicas (18 en total).

Problema 2. Sean H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Considera un punto E de manera que BC sea mediatriz del segmento DE. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

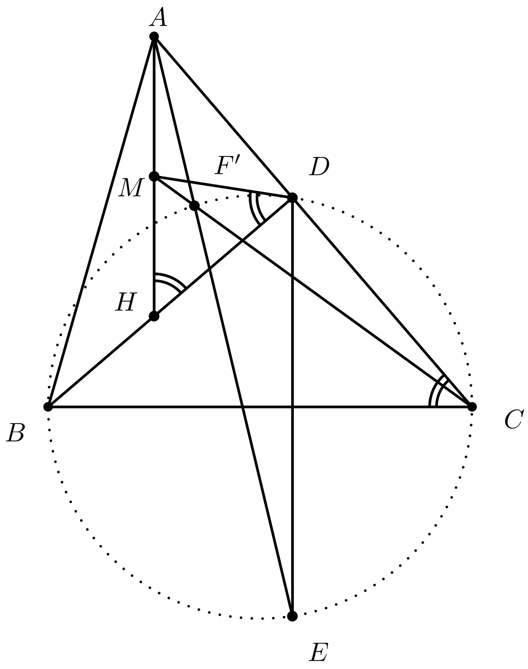
Solución. Sea ω la circunferencia de diámetro BC. D pertenece a ω y E también puesto que $\angle BEC = \angle BDC = 90$ ya que D y E son simétricos respecto a BC. Sea F' el punto donde el segmento CM corta a ω. Tenemos que $\angle BF'C = 90$ por abrir media circunferencia. El problema es equivalente entonces a probar que $F = F'$ o que A, F' y E están alineados.
Este problema es natural si trabajamos hacia atrás. Queremos ver que $\angle MF'A = \angle EF'C$. Pero tenemos las igualdades

$$\angle EF'C = \angle EDC = \angle HAC$$

la primera por abrir el arco CE y la segunda porque $DE \parallel AH \perp BC$. Entonces quisieramos ver que $\angle MF'A = \angle MAC$. Pero entonces bastará demostrar que $\angle MAF' = \angle MCA$ y entonces por criterio AA tendriamos $\Delta MAF' \equiv \Delta MCA$. La igualdad de ángulos es equivalente a que MA sea tangente a la circunferencia que pasa por los vértices A, F', C lo cual es equivalente por potencia del punto a que $MA^2 = MF' \cdot MC$. Pero M es punto medio de la hipotenusa AH asi que $MD = MA$. Por lo que resta ver que $MD^2 = MF' \cdot MC$ i.e que MD es tangente a ω. Notemos que $MD = MH$ y que $\angle MHD = \angle ACB$ pues ambos son suplementarios a $\angle HAD$. Entonces

$$\angle MDH = \angle BCD$$

esto implica que MD sea tangente a ω lo cual era lo único que nos faltaba demostrar.



Segunda solución. Sea F' la intersección, ya no de CM, sino de AE con ω, y sea M' la intersección de CF' con AH. Observamos que $\angle M'AF' = \angle F'ED = \angle M'CA$, de modo que $M'A^2 = M'F' \cdot M'C$.
Por otro lado, si E es el pie de altura de A sobre BC, entonces $\angle M'F'B = \angle M'EB = 90°$, de modo que $M'F'EB$ es cíclico. Luego, $\angle F'DA = \angle F'BC = \angle F'M'E$. Por lo tanto, $M'F'DA$ es cíclico. En particular, $\angle M'DF' = \angle M'AF' = \angle M'CD$. Luego, $M'D^2 = M'F' \cdot M'C = M'A^2$.
Finalmente, como AHD es un triángulo rectángulo y M' está en la hipotenusa AH y en la mediatriz de AD, se sigue que $M' = M$, y por tanto $F' = F$, de modo que $BF \perp CM$.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas, y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestra que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

Nota. Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3{,}6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

Solución. Como cada número se utiliza dos veces para etiquetar puntos, hay a lo más dos segmentos con esa etiqueta. Por lo tanto se utilizan al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

a) Primero observemos lo siguiente: si dividimos algunos puntos sobre la circunferencia en dos conjuntos no vacíos, siempre existirán dos puntos adyacentes que pertenecen a conjuntos diferentes.

Sea A el conjunto de los puntos con etiquetas $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, y B el conjunto de los puntos con etiquetas $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \ldots, n$. Sabemos que hay dos puntos adyacentes de distintos conjuntos. Trazamos un segmento s_1 entre ellos y consideremos ahora solo los restantes $2n - 2$ puntos. Es claro que ningún segmento posible entre estos $2n - 2$ puntos interseca a s_1. Además, entre ellos hay dos puntos adyacentes de distintos conjuntos. Trazamos un segmento s_2 entre ellos. Con los restantes $2n - 4$ puntos hacemos lo mismo para obtener s_3 y continuamos este proceso, siempre trazando segmentos entre puntos de A y B que no intersectan a ninguno de los anteriores.

Si n es par, como $|A| = |B|$, podremos trazar n segmentos de esta manera. Si n es impar, como $|B| - |A| = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 2$, llegaremos a un momento en el que nos queden dos puntos del conjunto B. En ese caso, trazaremos el segmento s_n entre esos dos puntos.

Con esta construcción, ninguno de los segmentos tendrá extremos en dos puntos con etiquetas menores o iguales que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Esto implica que a ningún segmento se le asignará una etiqueta menor o igual que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Así, el número de etiquetas que se usará será a lo más $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como este número es justamente una cota inferior para el número de etiquetas usadas, concluimos que con esta construcción, el número de etiquetas usadas será justamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

b) La respuesta es afirmativa. Coloreamos alternadamente los puntos en la circunferencia de blanco y negro, y usemos arbitrariamente las $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n$ etiquetas $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ en los puntos blancos (quizás sobrarán dos puntos blancos). Colocamos las demás etiquetas de cualquier manera.

Supongamos que un segmento s une a dos puntos blancos. Esto deja una cantidad impar de puntos de cada lado del segmento, los cuales deben unirse entre sí, ya que si hubiera un segmento uniendo puntos de distintos lados de s, este se cruzaría con s. Pero no se puede dividir en parejas una cantidad impar de puntos, así que llegamos a una contradicción y no puede haber segmentos entre puntos blancos. En particular no puede haber tampoco entre puntos con etiquetas menores o iguales que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq n$, por lo que estos puntos se deben unir con otros con etiqueta mayor. Se sigue que ninguno de los segmentos se etiqueta con los números $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, así que se usan a lo más $n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ etiquetas distintas para los segmentos. Pero este número también es cota inferior para el número de etiquetas usadas, de modo que se usan exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ etiquetas.

Problema 4. Una lista de enteros positivos es *buena* si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por varios elementos consecutivos de la lista. Por ejemplo, en la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$, la sublista $22, 30, 22$ es buena, mientras que la sublista $10, 34, 34, 22$ no es buena. Una lista es *muy buena* si todas sus sublistas son buenas.
Encuentra el menor entero positivo k tal que es posible crear una lista muy buena con 2019 elementos, en la cual se usen exactamente k valores distintos.

Respuesta. $k = 11$.
Solución. Es claro que cualquier lista muy buena es buena, y que cualquier sublista de una lista muy buena es a su vez muy buena. Denotamos por $f(n)$ al mínimo número de valores distintos que puede contener una lista muy buena con n elementos.
Lema. Para todo entero positivo $n \geq 2$, $f(n) \geq 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$

Demostración. Consideremos al elemento máximo M de la lista, que por hipótesis aparece exactamente una vez en la lista. Al suprimir este elemento, obtenemos dos listas, una a la izquierda y una a la derecha (posiblemente alguna de ellas vacía). Estas listas tienen en total $n-1$ elementos, y por lo tanto alguna de ellas tiene al menos $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ elementos. Esta sublista es muy buena, y por lo tanto debe usar al menos $f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos. Ya que M es mayor que todos los elementos de esta sublista, concluimos que la lista original tiene al menos $1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos.
Lema. Para todo entero positivo $n \geq 2$, $f(n) \leq 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$.

Demostración. Consideremos una lista L muy buena de longitud $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ que use exactamente $f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos. Elegimos un entero M, mayor que todos los elementos de L, y creamos una nueva lista L' colocando L en orden, luego M, y luego otra copia de L. Si n es par, eliminamos el último elemento de la segunda lista. Afirmamos que L' es una lista muy buena. Como L' tiene n elementos y $1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos, esto es suficiente para demostrar el lema. En efecto, si una sublista de L' contiene a M, entonces su máximo es M, que por construcción aparece una única vez en L', y por lo tanto aparece a lo más una vez en cualquier sublista de L'. Si una sublista de L' no contiene a M, entonces es a su vez sublista de alguna de las copias de L, y como L es muy buena se sigue que esta sublista es buena. Concluimos que L' es muy buena.

De los dos lemas obtenemos que $f(n) = 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$. Para terminar, observemos que $f(1) = 1$, por lo cual

$$\begin{aligned} f(2019) &= 1 + f(1009) = 2 + f(504) = 3 + f(252) \\ &= 4 + f(126) = 5 + f(63) = 6 + f(31) \\ &= 7 + f(15) = 8 + f(7) = 9 + f(3) = 10 + f(1) \\ &= 11. \end{aligned}$$

Solución 2. Consideremos para cierto k fijo la lista muy buena más larga posible que usa solo k valores distintos. Afirmamos que esta lista tiene $2^k - 1$ elementos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los valores usados son $1, 2, \ldots, k$. Consideremos la posición de k en esta lista. Entonces el elemento $k-1$ aparece a lo más dos veces, una a cada lado de k, pues si apareciera dos veces del mismo lado, digamos del izquierdo, aparecería dos veces en la sublista formada por todos los elementos a la izquierda de k. Más aún, debe aparecer exactamente una vez de cada lado, pues de lo contrario podríamos incluirlo en las sublistas que no lo contengan y obtener una más larga. Entonces $k-1$ aparece exactamente 2 veces.

Ahora, consideremos las 3 apariciones de k y $k-1$. Omitiendo estas, la lista original se divide en 4 sublistas (posiblemente algunas vacías), y $k-2$ aparece a lo más una vez dentro de cada una de ellas. Más aún, si no apareciera en alguna, entonces podríamos incluirlo para obtener una lista más larga. Entonces $k-2$ aparece exactamente 4 veces. Iterando este proceso obtenemos que la lista se ve de la siguiente manera

$$\ldots k-2 \ldots k-1 \ldots k-2 \ldots k \ldots k-2 \ldots k-1 \ldots k-2 \ldots$$

Y el elemento i aparece exactamente 2^{k-i} veces. Por lo tanto esta lista tiene $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$ elementos. Como $2^{10} - 1 = 1023 < 2019$, no puede haber una lista muy buena de 2019 elementos con solo 10 valores distintos. Por otro lado, ya hemos construido una lista muy buena con 11 valores distintos que tiene $2^{11} - 1 = 2047$. Para obtener una lista muy buena de 2019 elementos con 11 valores distintos basta entonces con suprimir los últimos 28 elementos de esta lista.

Comentario. La lista dada por $l_i = v_2(i)$ para $1 \leq i \leq n$ es un ejemplo explícito de una lista muy buena con el mínimo número posible de valores distintos. Esta coincide con la lista que se describe en la segunda solución.

Problema 5. Sean $a > b$ dos números enteros positivos, primos relativos entre sí. En un camino recto, en el cual está marcado cada centímetro n, para todo entero n, un saltamontes hará algunos saltos comenzando en la marca de 0 cm y siguiendo las siguientes reglas:

- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y no múltiplo de b, saltará a centímetros hacia adelante.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de b y no múltiplo de a, saltará b centímetros hacia atrás.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y múltiplo de b, saltará $a - b$ centímetros hacia adelante.
- Cuando un minuto no es múltiplo de a ni de b, el saltamontes no se mueve del lugar en el que está.

Determina todas las marcas a las que puede llegar el saltamontes.

Primera Solución.

Veamos primero que los saltos del saltamontes son periódicos con periodicidad ab minutos. Para esto basta demostrar que la posición en el minuto t es la misma que en el minuto $t + ab$. Esto sucede ya que después de ab minutos se pasó por:
- $b - 1$ minutos múltiplos de a y no de b,
- $a - 1$ minutos múltiplos de b y no de a,
- 1 minuto múltiplo de a y b,

concluyendo que el saltamontes salta $a(b-1)$ centímetros hacia adelante, $b(a-1)$ centímetros hacia atrás, y $a - b$ centímetros hacia adelante, dando un total de

$$a(b-1) - b(a-1) + a - b = ab - a - ab + b + a - b = 0$$

centímetros de diferencia cada ab minutos. Entonces basta saber las marcas a las que llega el saltamontes en los primeros ab minutos.

Se demostrará que el saltamontes llega a todas las marcas m tales que $-a < m < b$. Denotemos por $m(t)$ la marca en la que se encuentra en el minuto t. Se tiene que

$$m(t) = a\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor - b\left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor. \tag{1}$$

Para probar esto, obsérvese que al minuto t, han pasado $\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor$ minutos múltiplos de a y $\left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$ minutos múltiplos de b. De esto (1) se sigue.
Es claro que el saltamontes cambiará de marca si

$$t \in T = \{0, a, 2a, \ldots, (b-1)a, b, 2b, \ldots, (a-1)b\}.$$

Veamos primero que $-a < m(t) < b$. Basta verificar esto para $t \in T$.
Si $t = 0$, es claro.
Si $t = ak$, se tiene que $m(t) = ak - b\lfloor \frac{ak}{b} \rfloor$, y se cumplen ambas desigualdades, ya que

$$b\left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor \leq b\frac{ak}{b} = ak < ak + a \Rightarrow -a < ak - b\left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor$$

y

$$\frac{ak}{b} < 1 + \left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor \Rightarrow ak - b\left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor < b$$

Si $t = bk$ es análogo al caso anterior.
Notemos que entre $-a$ y b hay exáctamente $a + b - 1$ números. Si se demuestra que $m(t)$ es inyectiva en T, se concluye la demostración, ya que $|T| = a + b - 1$. Haremos análisis por casos:

1. $m(ak) = m(aj)$ con $0 \leq k < j < b$.
   Esto nos dice que $ak - b\left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor = aj - b\left\lfloor \frac{aj}{b} \right\rfloor$, es decir $a(j-k) = b(\left\lfloor \frac{aj}{b} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{ak}{b} \right\rfloor)$, por lo que $b|a(j-k)$, y por ser primos relativos, se tiene que $b|j-k$, pero $0 < j - k < b$, lo cual es una contradicción.

2. $m(bk) = m(bj)$ con $0 \leq k < j < a$.
   Es análogo al caso 1.

3. $m(ak) = m(bj)$ con $0 < k < b$ y $0 < j < a$.
Esto implica que $ak - b\lfloor\frac{ak}{b}\rfloor = a\lfloor\frac{bj}{a}\rfloor - bj$, es decir, $a(k - \lfloor\frac{bj}{a}\rfloor) = b(\lfloor\frac{ak}{b}\rfloor - j)$. De lo anterior, y como $(a, b) = 1$ se tiene que
$$a\Big|\left\lfloor\frac{ak}{b}\right\rfloor - j \qquad y \qquad b\Big|k - \left\lfloor\frac{bj}{a}\right\rfloor.$$
Pero se tiene que $-a < -j \leq \lfloor\frac{ak}{b}\rfloor - j < a - j < a$, y de manera análoga, $-b < k - \lfloor\frac{bj}{a}\rfloor < b$. De aquí deducimos que $\lfloor\frac{ak}{b}\rfloor - j = 0 = k - \lfloor\frac{bj}{a}\rfloor$. Entonces
$$-1 < k - \frac{bj}{a} \leq 0 \leq \frac{ak}{b} - j < 1,$$
lo que implica que
$$-a < ak - bj \leq 0 \leq ak - bj < b,$$
con lo que se concluye que $ak - bj = 0$. De aquí se tiene que $b|ak$, lo que implica que $b|k$ por ser a y b coprimos, lo cual contradice que $0 < k < b$.

Por lo tanto m es inyectiva en T, y entonces $m(T) = \{-a + 1, -a + 2, \ldots, b - 2, b - 1\}$. Como $m(T)$ era un conjunto que nos representaba todas las posibles posiciones del saltamontes, se concluye que sólo llegará a las marcas desde $-a + 1$ centimetros hasta $b - 1$ centimetros.

Segunda Solución.

De la primera solución, se sabe que m es periódica con periodo ab, por lo que solo debemos encontrar las marcas a las que puede llegar el saltamontes desde el minuto 0 hasta el minuto $ab - 1$. Más aún, el hecho de que $-a < m(t) < b$ se justifica de igual manera que en la solución anterior (sin usar la fórmula cerrada para $m(t)$). Ahora, se procede a probar que $m(t)$ puede tomar cualquier valor entre $-a$ y b. Para ello, analizamos las marcas por las que puede pasar el saltamontes módulo $(a + b)$. Considere el conjunto T de la primer solución con sus elementos ordenados de menor a mayor, esto es,
$$\{x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_{a+b-2}\} = \{0, a, 2a, \ldots, (b - 1)a, b, 2b, \ldots, (a - 1)b\}$$
con $x_0 < x_1 < \cdots < x_{a+b-2}$. Como $a \equiv -b \mod a + b$, entonces
$$m(x_{i+1}) - m(x_i) \equiv a \mod a + b \tag{2}$$
para $0 \leq i \leq a + b - 3$. Un argumento inductivo usando (2) nos lleva a que $m(x_n) \equiv na \mod a + b$ para $0 \leq n \leq a + b - 2$. Como $(a, b) = 1$, entonces $(a, a + b) = 1$, por lo que $\{na : 0 \leq n \leq a + b - 1\}$ representa un sistema completo de residuos módulo $(a + b)$. Entonces, las marcas por las que puede pasar el saltamontes son los enteros l tales que $-a < l < b$ y $l \equiv na \mod a + b$ para algún $0 \leq n \leq a + b - 2$, es decir, que $m \not\equiv -a \mod a + b$. Claramente todos los enteros entre $-a$ y b cumplen esta última condición, como se buscaba.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 45^\circ$ con ortocentro H, circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea P un punto de Γ tal que el circuncírculo del triángulo PHB es tangente a BC en B. Sean X y Y los circuncentros de los triángulos PHB y PHC, respectivamente. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos PXO y PYO, respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 son puntos de las rectas AB y AC, respectivamente.

Solución. Primero, probaremos el siguiente lema:

Lema. Sea M el punto medio de BC y A' el punto diametralmente opuesto a A en Γ. Entonces los puntos P, H, M y A' son colineales.

Demostración. Primero observamos que $BH \parallel CA'$ pues BH es altura sobre AC y $\angle ACA' = 90^\circ$ dado que AA' es un diámetro. Análogamente, $CH \parallel BA'$, de modo que $BHCA'$ es un paralelogramo y en particular H, M y A' son colineales .

Ahora bien, sea P' el punto de intersección de HM con Γ distinto de A'. Entonces,

$$\angle BP'H = \angle BP'A' = \angle BCA' = \angle CBH = \angle BPH$$

donde la última igualdad se da debido a que Γ_1, el circuncírculo de PHB, es tangente a BC en B. De aquí, P' está en Γ_1 y está en Γ, por lo que tiene que ser P o B. Claramente no puede ser B (ya que H, B y M no son colineales), por lo que $P = P'$, como se quería. □

Continuamos con la solución del problema:

Por el lema y por la simetría de la figura, basta con ver que O_1 está sobre AB. Para ello, primero notamos que $\angle PXB = 2(180^\circ - \angle PBC) = 2\angle PAC = \angle POC$, y dado que los triángulos PXB y POC son isósceles, se sigue que son semejantes. Luego, $\angle XPO = \angle BPC = 45^\circ$.

Sea C' el punto diametralmente opuesto a C en Γ. Claramente, C', X y B son colineales pues XB es perpendicular a BC por ser Γ_1 tangente a BC en B, por lo que $\angle XC'O = \angle BCC' = 45^\circ = \angle XPO$, lo que implica que C' pertenece a Ω_1, el circuncírculo de POX.

Sea T el punto de intersección de las rectas BO y CP. Observamos que $\angle TOC = 90^\circ = \angle CPC'$ por ser CC' diámetro de Γ. Esto indica que T está sobre Ω_1. Además,

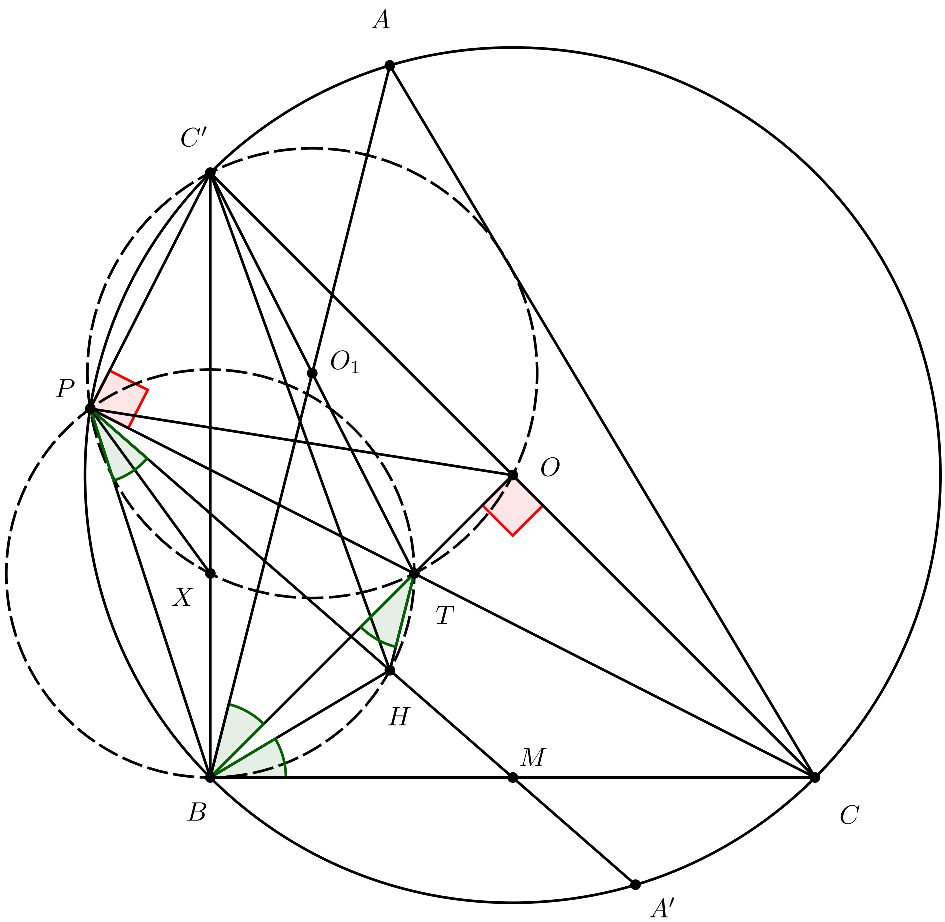
$$\angle PXB = 2(90^\circ - \angle PBX) = 2(90^\circ - \angle TCO) = 2\angle CTO = 2\angle PTB,$$

lo que implica que T está sobre Γ_1.

Ahora bien, como $\angle C'OT = 90^\circ$, entonces O_1 está sobre $C'T$, de modo que basta con demostrar que AB corta a $C'T$ en su punto medio. Además, como $BHAC'$ es un paralelogramo, sabemos que AB corta a $C'H$ en su punto medio, por lo que basta probar que $HT \parallel AB$. Sin embargo, sabemos que $PBHT$ es cíclico, de modo que

$$\angle BTH = \angle BPH = \angle BPA' = \angle BAO = \angle TBA,$$

lo cual muestra que $HT \parallel AB$.


A
C′
O1
P
O
X
T
H
M
B
C
A′