33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Ciudad de México, 11 de noviembre de 2019

Primer día

Problema 1.

Un número entero $m \geq 1$ es *mexica* si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es la cantidad de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números mexicas menores que 2019.

Nota. Los divisores de n incluyen a 1 y a n; por ejemplo $d(12) = 6$, ya que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos los divisores positivos de 12.

Problema 2.

Sean H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Considera un punto E de manera que BC sea mediatriz del segmento DE. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

Problema 3.

Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas, y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestra que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

Nota. Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3.6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo del examen 4 horas y media.

33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Ciudad de México, 12 de noviembre de 2019
Segundo día

Problema 4.

Una lista de enteros positivos es *buena* si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por varios elementos consecutivos de la lista. Por ejemplo, en la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$, la sublista $22, 30, 22$ es buena, mientras que la sublista $10, 34, 34, 22$ no es buena. Una lista es *muy buena* si todas sus sublistas son buenas.
Encuentra el menor entero positivo k tal que es posible crear una lista muy buena con 2019 elementos, en la cual se usen exactamente k valores distintos.

Problema 5.

Sean $a > b$ dos números enteros positivos, primos relativos entre sí. En un camino recto, en el cual está marcado cada centímetro n, para todo entero n, un saltamontes hará algunos saltos comenzando en la marca de 0 cm y siguiendo las siguientes reglas:

- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y no múltiplo de b, saltará a centímetros hacia adelante.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de b y no múltiplo de a, saltará b centímetros hacia atrás.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y múltiplo de b, saltará $a - b$ centímetros hacia adelante.
- Cuando un minuto no es múltiplo de a ni de b, el saltamontes no se mueve del lugar en el que está.

Determina todas las marcas a las que puede llegar el saltamontes.

Problema 6.

Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 45^\circ$ con ortocentro H, circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea P un punto de Γ tal que el circuncírculo del triángulo PHB es tangente a BC en B. Sean X y Y los circuncentros de los triángulos PHB y PHC, respectivamente. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos PXO y PYO, respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 son puntos de las rectas AB y AC, respectivamente.

Cada problema vale 7 puntos.
Tiempo máximo del examen 4 horas y media.