Persecución de ángulos básica
Técnicas generales:
-Notación básica:
Podemos poner una marca a segmentos o lados de triángulos o polígonos que sepamos que son iguales, o también a ángulos que sean iguales. Además, también podemos ponerles letras, en el caso de la olimpiada es común ponerles letras griegas como alfa (α), beta (β), gamma (γ), theta (θ), entre otras, pero tú puedes utilizar cualquier letra o símbolos que quieras
-Ángulos adyacentes y opuestos por vértice
Si tenemos dos ángulos cuyo vértice (punta del ángulo) se encuentra en el mismo punto, y además comparten un lado, entonces podemos sumar esos ángulos para obtener el ángulo que se obtiene al juntar todos.
Los ángulos opuestos por vértice son los dos ángulos (que son opuestos) y se forman al intersectarse dos líneas. Esos dos ángulos, siempre serán iguales.
-Ángulos llanos y de vuelta completa
Los ángulos llanos son los que se forman con una línea plana, y es igual a 180º. Los ángulos de vuelta completa representan toda una vuelta completa y miden 360º.
-Ángulos entre paralelas
Cuando se tienen dos líneas paralelas y una línea que corta a ambas, se forman varios ángulos, de los cuales varios resultan ser iguales. Hay varias formas de encontrar ángulos iguales entre paralelas.
Alternos internos: Los ángulos alternos internos están ambos “adentro” de las dos paralelas y están en lados contrarios de la línea que los corta. Estos ángulos son iguales, se pueden pensar como los ángulos de una letra Z.
Alternos externos: Los ángulos alternos externos están ambos “fuera” de las dos líneas paralelas y están en los lados contrario de la línea que los corta. Estos ángulos son iguales.
Correspondientes: Los ángulos correspondientes están ambos del mismo lado de la línea que corta a ambas paralelas y están sobre cada una de las paralelas (quedando uno entre las dos paralelas y otro fuera de ambas). Estos ángulos son iguales.
-Triángulos
La suma de los ángulos de un triángulo es 180º, por lo cual si tenemos los valores de dos de los ángulos, podemos obtener el valor del tercero restando a 180º la suma de los otros dos.
También hay algunos triángulos especiales que podemos considerar para perseguir ángulos:
Triángulos equiláteros: Los triángulos equiláteros tienen todos su ángulos iguales a 60º y todos sus lados son iguales entre sí.
Triángulos isósceles: Los triángulos isósceles tienen dos lados iguales y los ángulos opuestos a los lados iguales son también iguales entre sí, por lo cual, teniendo un ángulo de un triángulo equilátero es posible obtener los otros dos ángulos. Si el ángulo que tenemos es el ángulo que es distinto, basta con restárselo a 180º y el resultado dividirlo entre dos para obtener los dos ángulos iguales. Si el ángulo que tenemos es opuesto a uno de los lados iguales, el opuesto al otro lado igual será igual a ese ángulo y el tercer ángulo podremos obtenerlo restando la suma de esos dos a 180º.

Triángulos rectángulos: Estos triángulo tienen un ángulo de 90º, por lo cual, si sabemos el valor de alguno de los otros ángulos podremos obtener el tercero simplemente restándole el otro a 90º.

-Teorema del ángulo externo

Del hecho de que la suma de los ángulos internos del triángulo da 180º, podemos obtener que el ángulo externo (formado por el ángulo suplementario a uno de los ángulos del triángulo) se puede calcular sumando los valores de los dos ángulos del triángulo a los cuales no es suplementario.

-Polígonos regulares

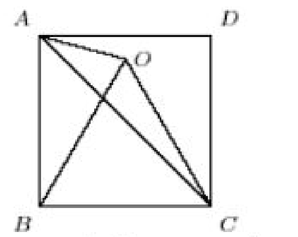
En general cualquier polígono (no necesariamente regular) tiene una suma de cifras que se puede calcular usando la fórmula $180^{\circ} \times (n-2)$ donde n es el número de lados del polígono. En el caso de los polígonos regulares esto nos da una herramienta para calcular cada uno de los ángulos internos del polígono, porque como son iguales, nos basta con dividir la suma entre el número de ángulos

-Bisectrices

-Ecuaciones con ángulos

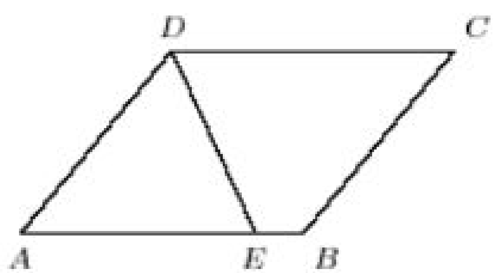
-Radios en un círculo

Ejemplo 1. En la figura, ABCD es un cuadrado y OBC es un triángulo equilátero. Obtén la medida del ángulo OAC.



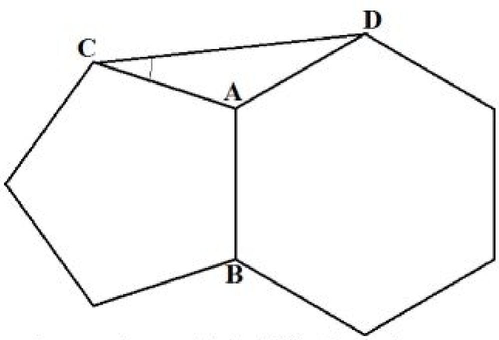

Solución: Notamos que AD=DC=BC=AB por ser un cuadrado ABCD y que OB=OC=BC por ser un triángulo equilátero. Por lo tanto, AD=CD=AB=BC=OB=OC. Luego el triángulo ABO es isósceles y además el ángulo ABO mide 30º puesto que <ABO=<ABC-<OBC por ser ángulos adyacentes y <OBC=60º por ser OBC equilátero y <ABC=90º por ser ABCD un cuadrado. Luego, el triángulo ABO es un triángulo isósceles con su ángulo distinto igual a 30º; como tenemos un ángulo, podemos sacar los otros dos, entonces $< OAB = \frac{180^{\circ} - < ABO}{2} = 75^{\circ}$.

Ejemplo 2. ABCD es un paralelogramo (es decir, el lado AB es paralelo al lado CD y el lado AD es paralelo al lado BC). DE es la bisectriz de <ADC. Sabiendo que BC mide 7 cm y CD mide 9 cm, encuentra la medida del segmento BE.



Solución: Primero, notamos que como DE es bisectriz del <ADC, entonces <ADE=<EDC. Luego <DEA=<EDC por ser ángulos alternos internos entre paralelas. Luego <ADE=DEA y por lo tanto, el triángulo DEA es isósceles. Ahora, los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos, pero también opuestos. Luego, AE=AD=7 cm y AB=CD=9 cm. Entonces BE=AB-AE=2 cm.

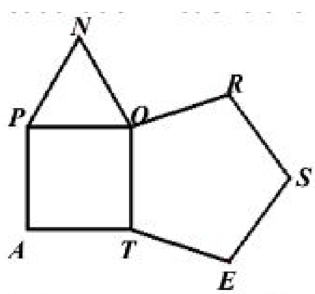
Ejemplo 3. Se tienen un pentágono regular y un hexágono regular con un lado en común AB. Se traza la línea que une los vértices C y D de ambos polígonos. ¿Cuál es la medida del ángulo ACD?



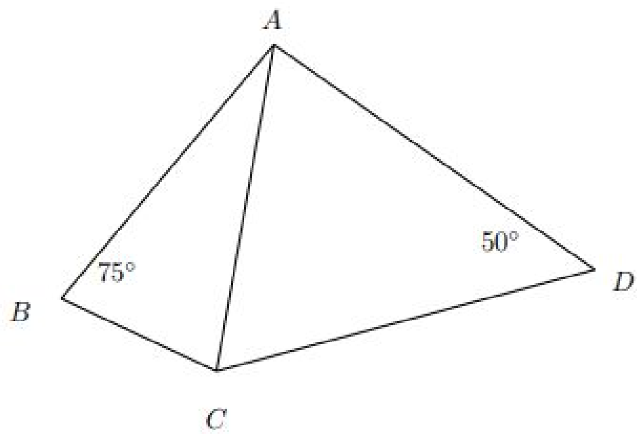

Solución. Tenemos dos polígonos regulares, por lo cual utilizar las estrategias de polígonos regulares puede ser bastante útil. Notemos que por la fórmula de suma de ángulos internos de un polígono, la suma de los ángulos de un pentágono es 180x(5-2)=180x3=540. Luego, la suma de los ángulos de un hexágono es 180x(6-2)=180x4=720. Luego, como los ángulos internos de un pentágono son todos iguales, el ángulo CAB es igual a $\frac{540º}{5} = 108º$ y como los ángulos internos de un hexágono son iguales, el ángulo DAB es igual a $\frac{720º}{6} = 120º$. Luego el ángulo <CAD, el ángulo <DAB y el ángulo <BAC completan una vuelta completa de 360º, y por lo tanto <CAD=360º-<DAB-<BAC=360º-120º-108º=132º. Luego, también notamos que todos los lados del pentágono regular y todos los lados del hexágono regular con iguales, entonces CA=AD, por lo cual el triángulo CAD es isósceles. Entonces el ángulo ACD= $\frac{180º - <CAD}{2} = \frac{180º - 132º}{2} = 24º$.

**Problemas**

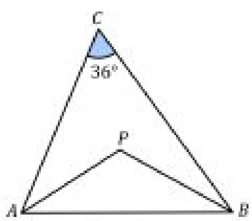
Problema 1. El pentágono ROTEs es regular, PON es un triángulo equilátero y PATO es un cuadrado. Encuentra la medida del ángulo RNO.



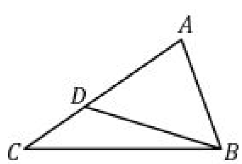
Problema 2. En la figura, AD=DC y AB=AC, <ABC=75º y <ADC=50º. ¿Cuánto mide <BAD?



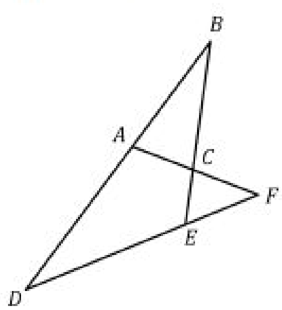

Problema 3. En el triángulo ABC, <ACB=36º y las bisectrices de los ángulos internos <CAB y <ABC se intersectan en P. Encuentre la medida en grado de <APB.



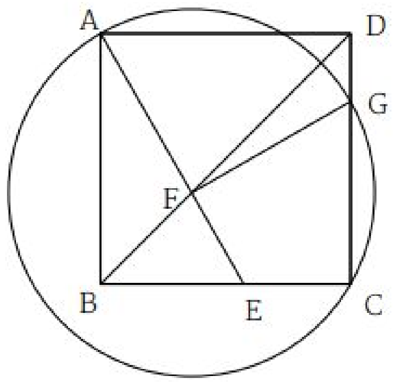

Problema 4. En el triángulo ABC tenemos que AB=AD y <ABC-<ACB=45º. Encuentra la medida en grado de <CBD.



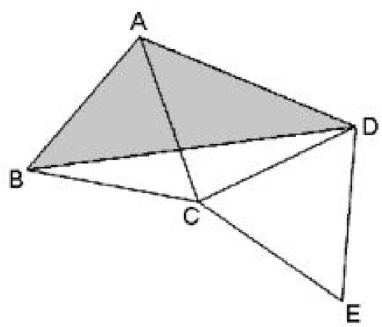

Problema 5. En la figura de abajo, se tiene que BA=BC, AD=AF, EB=ED. Halla la medida en grados de <BED.



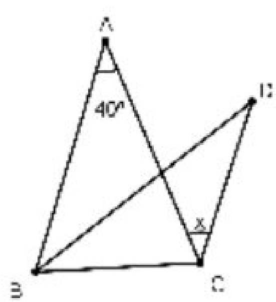
Problema 6. Se tiene un cuadrado ABCD y un punto E sobre el lado BC. La intersección de AE con BD es el punto F. Con centro en F se traza una circunferencia que pasa por el punto A, esta circunferencia intersecta al lado CD en G. Calcula el valor de <GFE.



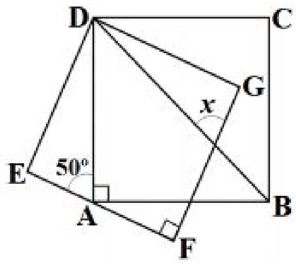

Problema 7. En la figura, ABC y CDE son triángulos equiláteros iguales. Si el ángulo ACD mide 78º. Calcula las medidas de los ángulos del triángulo ABD.



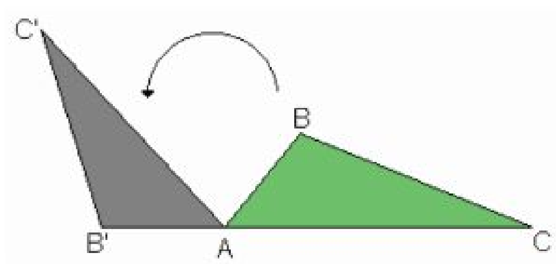

Problema 8. El triángulo ABC es isósceles con AB = AC. BD es la bisectriz del ángulo <ABC. El punto D está a la misma distancia de C que B. Calcula la medida del ángulo marcado con x



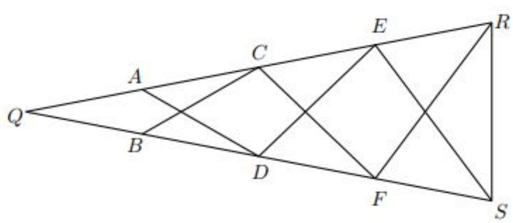

Problema 9. En la siguiente figura, ABCD y DEFG son cuadrados. ¿Cuál es la medida del ángulo x?




Problema 10. Un triángulo ABC, donde su ángulo ACB mide 25º, se rota como indica la flecha de la figura, dejando fijo el punto A, de manera que B toma la posición de B’ y C toma la posición de C’. La rotación hizo que los puntos A, B’ y C quedaran alineados y que B, C y C’ también. Calcula la medida del ángulo ABC.

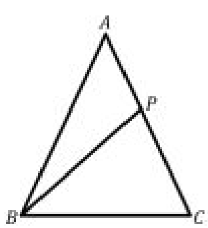



Problema 11. Si en la siguiente figura, los segmentos QA, QB, AD, BC, DE, CF, ES, FR y RS tienen la misma longitud. ¿Cuánto vale <RQS?

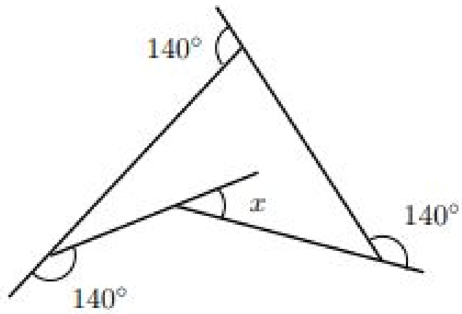



Problema 12. Considera dos circunferencias $\square_1$ y $\square_2$ del mismo radio con centro A y B, respectivamente, tales que A está sobre $\square_2$. Sea P uno de los puntos de intersección de $\square_1$ y $\square_2$. Sea Q la intersección de la recta paralela a AB por P con $\square_1$. Si PQ=5, ¿Cuál es el radio de $\square_1$?

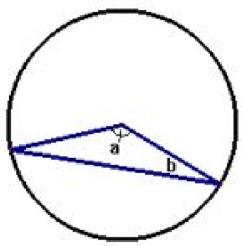
Problema 13. En la siguiente figura, AB=AC y BC=BP. Si <CAB mide 50º, ¿cuánto mide <CBP?




Problema 14. ¿Cuánto mide el ángulo x en la figura?




Problema 15. El ángulo a mide 118º. ¿Cuánto mide el ángulo b?




Problema 16.