Taller 18/julio/2019

1. Si sobre los lados *AB* y *CA* de un triángulo *ABC* se construyen triángulos equiláteros *ABC'* y *CAB'*, demuestra que *BB'* = *CC'*.
2. Sean *AE* y *CD* son alturas del *ΔABC*. *H* es el ortocentro. *F*, *G* y *K* son los puntos medios de *CH*, *CA* y *AB*, respectivamente. Demuestra que el ∠*FGK* es un ángulo recto.
3. Sean *ABC* un triángulo y *D* un punto tal que ∠*DAB* = ∠*DBC* = ∠*DCA*. Si *AD*, *BD* y *CD* se prolongan hasta intersecar al circuncírculo del triángulo *ABC* en *B'*, *C'* y *A'*, respectivamente, muestra que *ABC* y *A'B'C'* son semejantes.
4. Por un punto *C* del arco *AB* de una circunferencia se han trazado dos rectas arbitrarias que cortan la cuerda *AB* en los puntos *D* y *E*, y a la circunferencia en los puntos *F* y *G*. ¿Para cuál posición del punto *C* en el arco *AB*, el cuadrilátero *DEGF* es cíclico?
5. Sea *ABC* un triángulo isósceles con *AB* = *AC*. Una recta por *A* corta al circuncírculo del triángulo y a la recta *BC* en los puntos *E* y *D*, respectivamente. Muestra que los circuncírculos de los triángulos *DCE* y *BDE* son tangentes a los lados *AC* y *AB*, respectivamente.
6. Demuestra que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces la perpendicular trazada hacia un lado desde el punto de intersección de las diagonales bisecta el lado opuesto.
7. (Teorema de Miquel) Sea *ABC* un triángulo, tome de forma arbitraria los puntos *D*, *E*, *F* sobre los lados *BC*, *AC*, *AB*, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos *AEF*, *BDF* y *CDE* tienen un punto en común.
8. Sea *ΔABC* un triángulo isósceles (con *AB* = *AC*) inscrito en una circunferencia. Se toman un par de puntos *P* y *Q* sobre *AB* y *AC*, respectivamente, tal que *PQ* es paralela a *BC*. Si *PQ* corta la circunferencia en *D* y *E*, encuentra el valor de $\frac{DP}{EQ}$.
9. Demuestra la Ley de Senos:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
Donde *a*, *b* y *c* son los lados opuestos a los ángulos *A*, *B* y *C*, respectivamente; y *R* es el radio de la circunferencia circunscrita al Δ*ABC*.
10. Dado un triángulo *ABC* con ángulo recto en *A*, sean *M* un punto cualquiera del segmento *BC*, y *P* un punto tal que *PC* es perpendicular a *BC* y que el cuadrilátero *APCM* es cíclico. Demostrar que
$$\frac{BM}{PC} = \frac{BC}{PM} \cdot \frac{AM}{AC}$$