Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 6

Problemas variados

1. Se tiene una sucesión aritmética $\{a_n\}$ con diferencia positiva. Se sabe que se puede elegir uno de los números $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}$ y uno de los números $a_{21},\ a_{22},\ a_{23}$ de modo que la diferencia entre estos dos números es múltiplo de 7. Encuentra el mínimo valor que puede tener la diferencia de la sucesión.
2. Calcula la siguiente suma
$$a = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + 10 \cdot 4^9$$
3. Calcula la suma
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^2+1}$$
4. Determina todas las parejas ordenadas de enteros (a, b) tales que:
$$(a+b+2)^2 = ab(a+2)(b+2)$$
5. En un prisma rectangular, el área de la cara de arriba es 135, el área de la cara frontal es 30 y el área de la cara de la derecha es 50. Encuentra el volumen del sólido.
6. (AHSME 1987) Si (x, y) es una solución del sistema $xy = 6$ y $x^2y + xy^2 + x + y = 63$ encuentra $x^2 + y^2$.
7. (AIME 2013) Sea ABCD un cuadrado, y sean E y F puntos en AB y BC, respectivamente. La paralela a BC por E y la paralela a AB por F dividen a ABCD en 2 cuadrados y dos rectángulos no cuadrados. La suma de las áreas de los dos cuadrados es $\frac{9}{10}$ del área del cuadrado ABCD. Encuentra $\frac{AE}{EB} + \frac{EB}{AE}$.
8. Llamémosle producto de un conjunto al producto de todos los elementos de un conjunto. ¿Cuánto es la suma de los productos de cada uno de los subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6\}$?
9. (OMMBC 2015, 3ª Etapa) Se escriben en el pizarrón 5 números enteros positivos (no necesariamente distintos) y se calculan todas las posibles sumas de parejas de estos números. Los únicos resultados que se obtienen son 31, 38 y 45 (algunos de ellos varias veces). ¿Cuáles son los 5 números?
10. (OMMAGS 2008, Semifinal) Decimos que un número n es *triangular* si podemos escribirlo como la suma de los primeros *k* números naturales, es decir, de la siguiente forma:
$$n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) + k = \frac{k(k+1)}{2}$$
Demuestra que si n es un número triangular, entonces también el número $9n + 1$ es triangular.

Problemas obtenidos de:
http://ommags.com/new/ejercicios/examenes-omma/
http://ommags.com/new/material-2017/
http://ommbc.org/sitio/#/entrenate/exa_estatales
http://ommbc.org/sitio/#/entrenate/mat_avanzado