Talleres Final de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes

Álgebra. Taller 5

Sumas Telescópicas

Problemas

1. (Canadá, 1969). Calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k$.
2. Evalúa el siguiente producto $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2019^2}\right)$
3. Encuentra la suma de $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$
4. Evalúa las siguientes sumas
   a. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$
   b. $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$
   c. $\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{n^2+5n+6}$
   d. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+4n}$

Problemas más interesantes

1. (Rumania, 2013) Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + \cdots + a_n \leq k$, para $k = 1, \ldots, n$. Muestre que
$$\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n} \leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$
2. Evalúa las siguientes sumas
   a. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$
   b. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k-1)!+k!+(k+1)!}$
3. Evalúa el siguiente producto
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$$
4. Para cada entero positivo n sea $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^3$. Determina el valor de la suma $\frac{1}{a_2-1}+\frac{1}{a_3-1}+\cdots+\frac{1}{a_{100}-1}$.