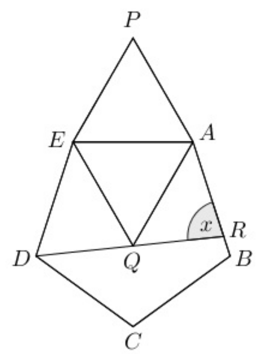
XIX ONMAPS. Tepic, Nayarit 2019

Segundo día

1 de Junio de 2019

Problema 10. En la figura se tiene $ABCDE$ un pentágono regular y APE un triángulo equilátero. Q es un punto en el interior del pentágono de manera que $PAQE$ es un rombo. Sea R la intersección de las rectas DQ con AB. Encuentra el valor del ángulo $\angle QRA$.



Solución 10. Como $PEQA$ es rombo, se tiene que $PE = EQ$, como $ABCDE$ es regular, entonces $AE = ED$ y finalmente, como APE es equilátero, $AE = EP$, así que $EQ = ED$ y por lo tanto, $\triangle EDQ$ es isósceles. Como el ángulo interno de un pentágono regular mide 108° y el ángulo interno de un triángulo equilátero mide 60°, entonces, $\angle DEQ = 108 - 60 = 48°$. Por lo tanto, $\angle EDQ = \angle EQD = \frac{180-48}{2} = 66°$. Ahora bien, como $EARD$ es un cuadrilátero, la suma de sus ángulos es 360°, por lo que el ángulo buscado es igual a $\angle ARD = 360 - 108 - 108 - 66 = 78°$.

Criterio Propuesto

Llegar a que DEQ es isósceles.	2
Calcular $\angle DEQ = 48°$.	1
Calcular $\angle EDQ = 66°$.	1
Plantear estrategia o ecuación que permita la resolución.	2
Calcular correctamente $\angle ARD = 78°$.	1

Problema 11. Cinco amigos fueron a participar en una Olimpiada de Matemáticas. El examen era de 54 problemas de opción múltiple para resolver en tres horas. Cada acierto suma 9 puntos, cada respuesta incorrecta resta 4 puntos y cada pregunta sin contestar no suma ni resta puntaje. Los 5 amigos obtuvieron el mismo puntaje

(mayor que cero), pero la cantidad de aciertos, errores y preguntas no respondidas de los amigos fue diferente. Determinar los posibles puntajes que obtuvieron los amigos.

Solución 11. Observamos que 9 malas anulan 4 buenas, 18 malas anulan 8 buenas, etc:

Número de Buenas	Número de Malas	Total de Problemas	Puntaje
0	0	0	0
4	9	13	0
8	18	26	0
12	27	39	0
16	36	52	0

Tenemos 5 calificaciones iguales, pero necesitamos que el resultado sea positivo, así que el que tiene 0 contestando 52 preguntas, todavía tiene libres dos para responer. Los posibilidades para los dos problemas restantes son: 2 buenas y 0 malas, 1 buena y 1 mala, 1 buena y un problema sin contestar. Por lo tanto los posibles puntajes son: $9 \times 2 = 18, 9 \times 1 - 4 \times 1 = 5, 9 \times 1 + 0 \times 1 = 9$.

Criterio Propuesto

9 malas anulan 4 buenas.	1
La primera tabla que funcione.	2
La segunda tabla que funcione.	2
La tercera tabla que funcione.	2

Problema 12. Hilbert escribe en su libreta todos los números N que cumplen las siguientes condiciones:

i) N tiene 7 dígitos todos distintos.

ii) Cuando se borran tres de los dígitos de N quedan escritos los númers 2, 0, 1, 9 en ese orden.

iii) N es múltiplo de 3.

¿Cuántos números hay en la lista de Hilbert?

Solución 12. Acomodar los dígitos $2, 0, 1, 9$ en orden, en los 7 espacios disponibles, lo podemos hacer de 35 formas, por ejemplo, en _2_0_19, donde se eligieron las posiciones $2, 4, 6$ y 7. En las tres posiciones restantes, se tienen que elegir 3 números cuya suma sea múltiplo de 3, porque los 4 díigitos ya usados suman ya un múltiplo de 3. Los dígitos restantes son $3, 4, 5, 6, 7, 8$ y las tercias que suman un múltiplo de 3 son las siguientes 8: $(3, 4, 5), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 7, 8), (4, 5, 6), (4, 6, 8), (5, 6, 7), (6, 7, 8)$. Cada una de estas tercias me genera 6 números distintos, al revolver los tres dígitos. Por lo tanto, la lista tiene $35 \times 8 \times 6 = 1680$ números.

Criterio Propuesto

Hay 35 formas de acomodar el $2, 0, 1, 9$.	2
Hay que encontrar tercias que sumen un múltiplo de 3.	3
Cada una se puede revolver de 6 formas	1
Solución	1

Problema 13. Un número de 6 dígitos distintos $\overline{abcdef}$ es *curioso* si cumple con las siguientes condiciones:

- El número de 3 cifras $\overline{abc}$ es un múltiplo de 5.
- El número de 3 cifras $\overline{bcd}$ es múltiplo de 17.
- El número de 4 cifras $\overline{abcd}$ tiene sus dígitos en progresión aritmética (no necesariamente en orden).

¿Cuántos números *curiosos* son múltiplos de 9?

Solución 13. Para que abc sea un múltiplo de 5, tiene que terminar en 5 o 0, entonces $c = \{0, 5\}$. Ahora encontraremos los múltiplos de 17 donde bc sea un múltiplo de 5. Si $c = 0$, el primer múltiplo de 17 es 000, luego como 102 es múltiplo de 17 sumemos 102 a los números resultantes, así encontramos $000, 102, 204, 306, 408$ y como el siguiente es 510, que no cumple, no habrá múltiplos de 17 que inicien con $60, 70, 80$, por lo que nos brincamos hasta 901. Luego, si $c = 5$, el primer múltiplo de 17 es 051, y sumando 102 obtenemos los valores de $051, 153, 255, 357, 459$ y como 561 no termina en 5, no habrá que inicien con 65, 75, hasta 850 y 952. De estos 13 valores obtenidos, los que sus cifras están en progresión aritmética son 000, 102, 204, 306, 408, 153 y 357, donde 000 no cumple por tener dígitos iguales, 408 tampoco porque no podemos agregar otro dígito a, y el resto de los números descartados aun agregando cualquier dígito no estarán en progresión aritmética. Ahora, al agregar el valor de a obtenemos los resultados de $3102, 6204, 9306, 7153, 1357, 9357$. Ahora, con los valores de $abcd$, busquemos ef de acuerdo a la suma de los dígitos que ya tenemos para que sea un múltiplo de 9. Después de la búsqueda obtenemos 26 números curiosos: 310257,310275, 310248, 310284, 620415, 620451, 620478, 602487, 930654, 930645, 930672, 930627, 930681, 930618, 715302, 715320, 715392, 715329, 135702, 135720, 135792, 135729, 935712, 935721, 935748, 935784.

Criterio Propuesto

$c = 0, 5$	1
Posibles bcd múltiplo de 17.	2
Encontrar a tal que a, b, c, d en progresión aritmética.	2
Encontrar ef	2

Criterio Propuesto

$c = 0,5$	1
Posibles a, b, c, d en progresión aritmética.	2
bcd múltiplos de 17	2
Encontrar ef	2

Problema 14. Sea $ABCDEF$ un hexágono regular de lado 3. Sobre los lados AF y ED se marcan puntos M y N tales que $FM = EN = 2$. Sea P la intersección de BE con MN. Calcula la medida del segmento PD.

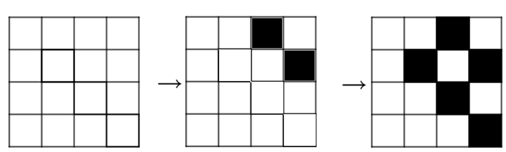
Solución 14. Por Teorema de Thales, veamos que MN es paralela a AD. Sea O el centro del hexágono; entonces PN es paralela a OD; como ODE es un triángulo equilátero, $OPND$ es un trapecio isósceles de medidas 1, 2, 1, 3, y ángulos de 120 y 60. Luego, puede partirse en cinco triángulos equiláteros unitarios.

Para calcular la medida del segmento PD usaremos Teorema de Pitágoras. Sea X el pie de la altura desde D hacia la prolongación de PN. Luego, el triángulo NDX es medio equilátero de lado 1, y las medidas del triángulo rectángulo PDX son $\frac{5}{2}, \sqrt{3}, PD$. Concluimos que $PD = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Criterio Propuesto

Trazar la paralela.	1
Construir el triángulo rectángulo.	2
Sacar las medidas.	3
Concluir.	1

Problema 15. Se tiene un tablero cuadriculado de $n \times n$, con $n \geq 3$ con todas sus casillas pintadas de blanco. Un cambio consiste en elegir un subtablero de 2×2 ó de 3×3 y cambiar el color de todas las casillas de una de sus diagonales (de blanco a negro o de negro a blanco).
Este es un ejemplo de una secuencia de cambios en un tablero de 4×4.



¿Para qué valores de n es posible en algún momento tener todo el tablero de negro?

Solución 15. La cuadrícula de 2×2 se llena al elegir una cuadrícula de 2×2 y tomar una y luego la otra diagonal. Para la cuadrícula de 4×4 basta repetir esto en los cuatro cuadrados de 2×2 de las esquinas.

Para el de 3×3.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Para la cuadrícula de 3×3, tomamos el cuadrado completo y utilizamos la diagonal AEI, y después completamos con cuadrados de 2×2 marcando las diagonales BC, GE, EC, FH.

Para las cuadrículas de 5×5 en adelante, vamos a notar que en un 3×3, como arriba, podemos elegir AEI y luego volver a cambiar EI, quedando solo el cuadrado A cambiado. En las cuadrículas de 5×5 en adelante, tomando cualquier casilla, podemos elegir un cuadrado de 3×3 en el que esa casilla sea una esquina y, entonces, se puede pintar solo esa. Entonces se pueden pintar todas las casillas sin problema.

Por lo tanto, la respuesta es para toda $n \geq 2$.

Criterio Propuesto

El caso de los n pares.	2
El caso 3×3.	1
Puedes colorear solo una casilla esquina.	1
Justificar el resto de casos.	3

Problema 16. Sean $a < b < c < d$ enteros positivos tales que a divide a b, b divide a c y c divide a d. Además, ninguno de ellos es divisible por el cuadrado de un número primo. Encuentra todas las cuartetas que cumplen lo anterior y tales que $a + b + c + d = 2019$.

Solución 16. Por las propiedades de divisibilidad, sabemos que $a|b, c, d$ y, por lo tanto, $a|2019$. La estrategia general aprovecha este hecho: restamos el menor y luego dividimos entre él, aprovechando que es factor común de los demás. Como son cuadrilibres, los nuevos números es divisible por el que ya encontramos. Como a divide a 2019, tenemos que $a = 1, 3, 673, 2019$, pero solo $1, 3$ son posibles, pues los demás se pasan.

Caso (1). Si $a = 1$, tenemos que $b + c + d = 2018$. Como $b \neq a$, entonces $b = 2$, pues si $b = 1009$, nuevamente se pasa. Además, podemos decir que $c = 2c', d = 2d'$. Entonces, $c' + d' = 1008$. Los divisores primos de 1008 son 2, 3 y 7. Como $b = 2$, no se puede que 2 divida a c', de modo que las opciones para c' son 3, 7, 21. Para cada una de ellas, tendríamos $d' = 1005, 1001, 987$.

Tenemos entonces tres soluciones: $(1, 2, 6, 2010), (1, 2, 14, 2002), (1, 2, 42, 1974)$.

Caso (2). Si $a = 3$, tenemos que $b + c + d = 2016$ y que, definiendo $b = 3b', c = 3c', d = 3d'$, tenemos que $b' + c' + d' = 672$. Los factores primos de 672 son 2, 3, 7;

como ya usamos 3, las opciones para b' son 2, 7, 14. Si $b' = 2$, entonces $c'' + d'' = 335$. Como los factores de 335 son 5 y 67, las opciones de d'' son 330, 268. Como ambos son múltiplos de 2, no es posible. Si $b' = 7$, entonces $c'' + d'' = 95$. Como los factores de 95 son 5 y 19, las opciones de d'' son 90, 76. Como 90 es múltiplo de 3, no es posible. Encontramos la solución $(3, 21, 399, 1596)$. Si $b' = 14$, entonces $c'' + d'' = 47$. Como 47 es primo, no es posible.

Criterio Propuesto

a divide a $b, c, d, 2019$	1
Estrategia para resolver.	1
$a = 1$ o $a = 3$.	1
Resolver el primero de los casos.	3
Resolver el segundo.	1

Problema 17. En el pizarrón está escrito el número 2019, dos mil diecinueve veces. Se van a borrar todos los dígitos menos cuatro, de manera que los cuatro dígitos que sobren sean 2, 0, 1, 9, en ese orden. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?

Solución 17. Separamos la cuenta en casos, según la cantidad de 2019s distintos de donde se tomen los dígitos.

Caso 1: Un 2019. Basta con elegir cuál 2019 sobrevive; son 2019 maneras posibles.

Caso 2: Dos 2019. Debemos elegir una pareja de 2019s. Esto se puede hacer de $\binom{2019}{2}$. Ahora, se pueden tomar de tres maneras distintas: 2-019, 20-19 y 201-9. Luego, son $\binom{32019}{2}$.

Caso 3: Tres 2019. Elegimos una tercia de 2019s de $\binom{2019}{3}$ maneras distintas. Se pueden elegir de tres maneras distintas: 2-0-19, 2-01-9, 20-1-9. Luego, son $\binom{32019}{3}$ maneras distintas.

Caso 4: Cuatro 2019. Elegimos cuatro 2019s de $\binom{2019}{4}$ maneras distintas. Como de cada uno se debe tomar uno, la única manera es 2-0-1-9. Luego, son $\binom{2019}{4}$ maneras distintas.

La respuesta es $\binom{2019}{1} + 3\binom{2019}{2} + 3\binom{2019}{3} + \binom{2019}{4}$. Usando la propiedad del triángulo de Pascal, no es difícil ver que es equivalente a $\binom{2022}{4}$.

Solución 17 Alternativa. Resolveremos el problema usando caminos. Consideremos un tablero de 2018×4. Avanzar hacia arriba sobre las líneas del tablero representa avanzar sobre los distintos 2019s escritos; cada uno de los 4 segmentos a la derecha representa la elección, en orden, de los 4 dígitos que sobreviven; de modo que podemos establecer una biyección entre cada camino posible en el tablero y cada manera válida de elegir los dígitos que no serán borrados. Luego, la respuesta es $\binom{2022}{4}$.

Solución 17 Segunda Alternativa. Resolveremos el problema usando separadores. Usaremos 4 separadores para representar los cuatro dígitos que no serán borrados (sobrevive). Como los separadores pueden ir hasta el final o hasta el principio del acomodo, usaremos 2018 bolitas para representar cuántos 2019s hay antes de cada dígito no borrado. Luego, un separador hasta el inicio indica que hay cero 2019s antes de un dígito que sobrevive, es decir, que sobrevive algún dígito del primer 2019; de manera similar, un separador al final indica que hay dos mil dieciocho 2019s antes algún dígito que sobrevive, es decir, que sobrevive algún dígito del último 2019. Luego, dos separadores juntos indica que el mismo 2019 tiene dos dígitos que sobreviven. Por último, el primer separador indica la posición del 2, el segundo del 0, el tercero del 1, el cuarto del 9.

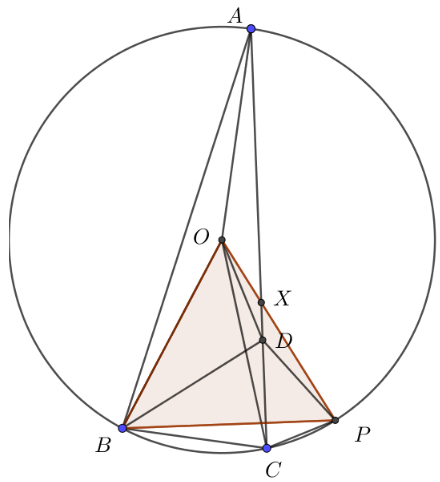
Habiendo establecido nuestra biyección, podemos concluir que la respuesta es $\binom{2022}{4}$.

Criterio Propuesto

Separar en 8 casos sin agrupar.	1
Agrupar los 8 casos anteriores en 4.	2
Casos de 0 espacios y 1 espacio.	1
Caso de 2 espacios.	2
Caso de 3 espacios.	1

Problema 18. Sea ABC un triángulo tal que $AB = AC$ y $\angle BAC = 20°$. La bisectriz del $\angle ABC$ interseca a AC en D. Si O es el centro de la circunferencia que pasa por A, B y C, calcula $\angle ADO$.

Solución 18. Observemos que existe un punto P del mismo lado que C respecto de BO, sobre el circuncírculo del ABC tal que $\triangle BOP$ es equilátero. Notemos también que BD es bisectriz del $\angle OBP$, por lo que $OD = DP$. Ahora, sea O' el circuncentro del $\triangle OCP$. Sabemos que O' está sobre la recta CD, pues $\angle O'OC = \angle OCO' = 10°$. Pero también O' está sobre la mediatriz de OP pues $OD = DP$ y como dos rectas no paralelas se intersecan en un único punto, entonces $O' = D$, por lo que $\angle DOX = 10° = \angle COD$ y por lo tanto $\angle ADO = 20°$.



Criterio Propuesto

Trazar el equilátero BOP.	2
El circuncentro del $\triangle OCP$ está sobre la mediatriz de OP y sobre CD	1
D está sobre la recta que pasa por C y el circuncentro del OCP.	2
D está sobre la mediatriz de OP.	1
Concluir.	1

Solución 18 Alternativa. Sea X la intersección de OP con AC, P como en la primera solución. Notemos que $\angle POC = 20°$, por ser ángulo central. También $\angle CPB = 20°$. Luego, por ALA, $\triangle OXC \cong \triangle PCB$. Por lo tanto $XC = BC$. Por el teorema de la bisectriz tenemos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{XD}.$$

Pero también sabemos que $\triangle ABC \sim \triangle OCP$, por lo que $\frac{OC}{CP} = \frac{AB}{BC}$, por lo que

$$\frac{DC}{XD} = \frac{OC}{CP} = \frac{OC}{OX}.$$

Así por el teorema de la bisectriz, OD es bisectriz de $\angle COX$. De esta manera $\angle ADO = \angle COD + \angle DCO = 20°$.

Criterio Propuesto

Trazar el equilátero BOP.	2
$\triangle OXC \cong \triangle PCB$.	1
$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} = \frac{DC}{XD}$.	2
$\frac{DC}{XD} = \frac{OC}{CP} = \frac{OC}{OX}$.	1
Concluir.	1