XIX ONMAPS. Tepic, Nayarit 2019

Examen del Primer día.

31 de Mayo de 2019

Problema 1. Decimos que un número de cuatro dígitos es *tepiqueño* si es impar, la suma de sus dígitos es 12 y la multiplicación de sus dígitos es 0. ¿Cuál es la resta del *tepiqueño* más grande menos el *tepiqueño* más pequeño?

Solución 1. Como la multiplicación de los dígitos de un número *tepiqueño* es cero, uno de sus dígitos debe ser 0. Si buscamos el *tepiqueño* más grande, queremos que el dígito de los millares sea 9, y como la suma de sus dígitos debe ser 12, los dos dígitos que nos faltan deben sumar 3. Al ser impar, uno de los dígitos debe ser impar, así que tenemos las opciones $0+3$ o $1+2$ y por lo tanto el número tepiqueño más grande es 9201. Para el más pequeño, queremos el el dígito de los millares sea 1 y los otros dos dígitos deben sumar 11, que lo podemos hacer con $2+9$, así, el más pequeño es 1029, la resta es $9201-1029=8172$.

Criterio Propuesto

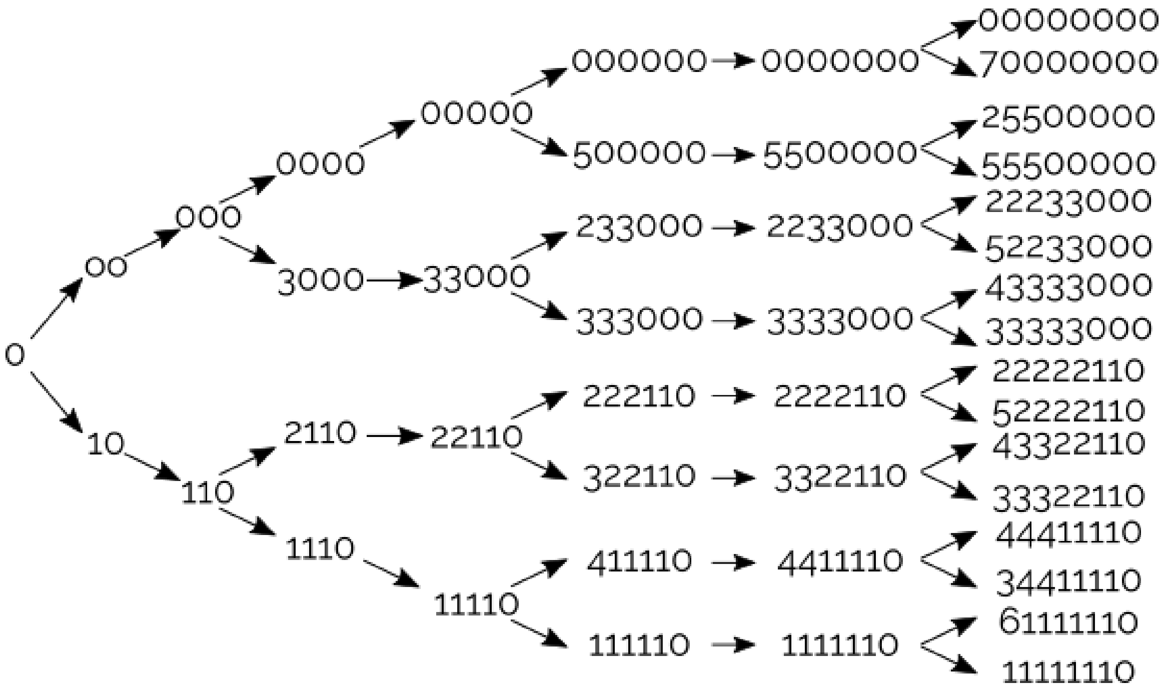
Uno de los dígitos es cero.	1
Observación para construir los números.	1
Encontrar el tepiqueño más grande.	2
Encontrar el tepiqueño más chico.	2
Calcular la resta.	1

Problema 2. Decimos que un número está *derecho* si cada uno de sus dígitos cumple las siguientes condiciones:

- Si el dígito es par, indica la cantidad de dígitos impares que hay a su derecha.
- Si el dígito es impar, indica la cantidad de dígitos pares que hay a su derecha.

Encuentra todos los números *derechos* de 8 dígitos.

Solución 2. El dígito de las unidades solo puede ser 0, pues un 1 significa que habrá un par a la derecha, cuál no es cierto. A partir de esta observación, haremos el árbol con los dígitos de derecha a izquierda.

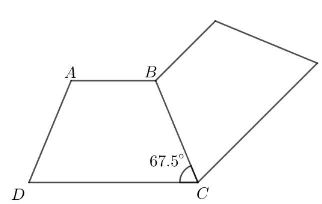


Por lo tanto, serán 17 opciones descartando el 00000000.

Criterio Propuesto

Idea para empezar la construcción.	2
Orden para la construcción de los números.	2
Dar la lista	3

Problema 3. Zeus tiene varios trapecios isósceles iguales al $ABCD$ de la figura, tales que AB es paralelo a CD, DC es el doble de AB y con área igual a $24\,cm^2$. Los puede pegar por un lado de cada trapecio como se muestra en la figura, hasta que un lado de un trapecio coincida con el lado AD, dando como resultado dos polígonos regulares, uno chico y uno grande que contiene al chico. ¿Cuál es el área total del polígono grande?



Solución 3. Sea P la intersección de AD y BC. Tenemos que el $\angle DPC = 180° - 135° = 45°$. Además, el $\triangle APB \sim \triangle DPC$ en razón 2 a 1, por lo que $DA = AP$

y $PB = BC$. Por lo que el área de $\triangle APB$ es una cuarta parte del $\triangle DPC$, es decir, el trapecio es $\frac{3}{4}$ del área del $\triangle DPC$.

Para el siguiente trapecio de nuevo, el punto agregado será P, ya que PB' deberá ser igual a BC otra vez. Es decir, P es el centro de los polígonos.

Si el ángulo central es de 45 grados, necesitamos 8 trapecios para hacer la figura, y el área total sería

$$\frac{4}{3}(24) \times 8 = 256$$

Solución 3 Alternativa. Como el ángulo marcado en el trapecio mide 67,5°, si pudiéramos formar un polígono regular, si ángulo interior sería $67{,}5° \times 2 = 135$. Para calcular la cantidad de lados, usamos la fórmula

$$\begin{aligned} 135 &= \frac{180(n-2)}{n} \\ 135n &= 180n - 360 \\ 360 &= 45n \\ 8 &= n \end{aligned}$$

Es decir, las figuras son octágonos regulares. Los lados de los octágonos están en razón 2:1 y, como son regulares, su área está en razón 4:1. Luego, el área del anillo representa $\frac{3}{4}$ y, por lo tanto, el área de toda la figura es $\frac{4}{3} \times 8 \times 24$.

Criterio Propuesto

Justificar que son 8. Un punto por utilizar lo anterior.	2
Razón entre las áreas Dos puntos por la idea sin justificar.	4
Resultado.	1

Problema 4. Orlando tiene algunos tableros de 3×3 cada uno con los números del 1 al 9 iguales a los de la figura, y colorea las casillas de blanco o negro de la siguiente forma: elige dos tableros y un número, y en el primer tablero cambia de color (de negro a blanco o de blanco a negro) las tres casillas de la columna en la que está el número elegido mientras que en el segundo tablero cambia de color las tres casillas del renglón en el que está el mismo número elegido. Si inicialmente todos los tableros son blancos y quiere colorearlos a negro repitiendo el proceso las veces que sea necesario.

a) ¿Podrá hacerlo si tiene 2018 tableros?
b) ¿Podrá hacerlo si tiene 2019 tableros?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Solución 4. Observemos primero que en cada movimiento siempre hay una cantidad par de casillas negras: en efecto, en cada movimiento cambias el color a 6 casillas en total. Así, si k se cambiaron a negro entonces $6-k$ se cambiaron a blanco. De esta manera si hay m cuadritos negros en total antes del movimiento, después habrán $m+k-(6-k)$ cuadritos negros, por lo tanto la paridad se mantiene. Y como en el primer movimiento siempre habrán 6, entonces siempre es par el número de casillas negras. Por ello, para n impar, no es posible colorear todos los tableros de negro.

Afirmamos que para todos los pares sí es posible. En efecto, si tomamos dos tableros y en los siguientes tres movimientos elegimos los cuadritos de la diagonal entonces los dos tableros quedan coloreados completamente. Así, como n es par, si tomamos los tableros por parejas disjuntas y hacemos este proceso, colorearemos todos los tableros.

Criterio Propuesto

Acomodar para pares.	3
Afectas 6 casillas	1
La paridad de las negra no cambia.	3

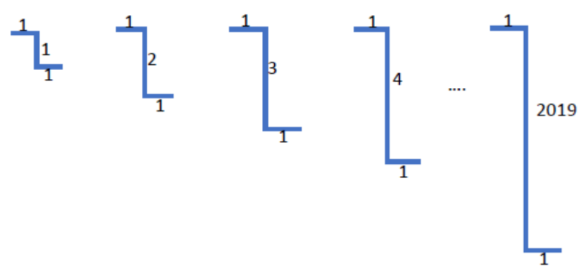
Problema 5. Decimos que un número entero n mayor que cero es *exótico* si de entre los divisores de n que sean mayores que 1, puedes encontrar alguno cuya suma de dígitos es 9, otro cuya suma de dígitos es 8, otro cuya suma de dígitos es 7, y así sucesivamente hasta uno cuya suma de dígitos es 1. ¿Cuál es el segundo número exótico más pequeño que también es un cuadrado perfecto?

Solución 5. Vamos a buscar exóticos cuadrados. Como hay un divisor mayor que 1 cuya suma de dígitos es 1, entonces debe ser una potencia de 10, y por lo tanto 2 y 5 también son divisores de n. Si hay un divisor cuya suma de dígitos es 9, entonces debe ser múltiplo de 9 y por consiguiente también de 3. Como debe ser cuadrado, al factorizar n necesitamos que los primos estén a una potencia par, así que $n = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot k$. Hasta aquí, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 25, 9 son divisores de n y aseguramos uno de suma de dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9 y esto pasa para cualquier exótico que además sea cuadrado. Solo falta asegurar encontrar uno cuya suma de sus dígitos sea 8. El más pequeño que cumple es $3600 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$, que tiene al 8 como divisor. El siguiente cuadrado a checar es $8100 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$, sin embargo, sus únicos divisores que no son múltiplo de 3 son $1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$ y ninguno de ellos tiene suma de dígitos 8. El siguiente cuadrado es $14000 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2$ que efectivamente tiene como divisor el 8 y es el segundo más pequeño que cumple las condiciones.

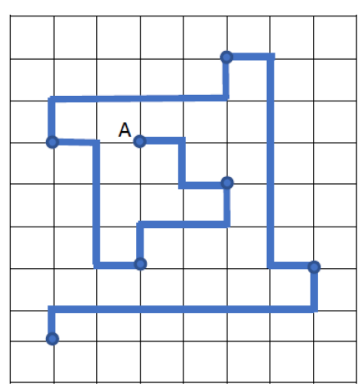
Criterio Propuesto

El 10 divide a n.	1
El 9 divide a n.	1
n es de la forma $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot k$.	2
10, 2, 3, 4, 5, 6, 25, 9 son divisores de n.	1
3600 es el más pequeño y 8100 no es exótico.	1
14000 es el número buscado.	1

Problema 6. Isaac tiene 2019 piezas de la siguiente forma



y las acomoda en un tablero cuadriculado de la siguiente forma



acomodando las 2019 piezas siguiendo el patrón de la figura de arriba. ¿Cuántos cuadros en vertical y en horizontal hay para llegar desde el punto A hasta el final de la pieza 2019? Por ejemplo: Desde el punto A hasta el final de la pieza 6 hay 5 hacia abajo y 2 hacia la izquierda.

Solución 6. El patrón hace que el "tronco" de las figuras queden uno vertical y uno horizontal. Además, si en un horizontal se mueve hacia arriba en la parte pequeña, en el siguiente se mueve hacia abajo en esa parte. Es decir, el patrón se repide cada cuatro.

Podemos ver que si después de $4n$ pasos estoy en el punto B, al avanzar $4n$ pasos pasará lo siguiente:

- En vertical nos moveremos 1 hacia arriba dos veces, 1 hacia abajo dos veces, $4n+1$ hacia abajo y $4n+3$ hacia arriba, dando un total de 2 hacia arriba.
- En horizontal nos moveremos 1 hacia la derecha dos veces, 1 hacia la izquierda dos veces, $4n+2$ hacia la izquierda y $4n+4$ hacia la derecha, en total 2 a la derecha.

Siguiendo el proceso, en el paso 2016 estaremos 1008 arriba y 1008 a la derecha. Los siguientes 3 pasos tienen la misma dirección que los tres primeros. Nos moveremos en vertical 2017 hacia abajo, 1 hacia abajo dos veces y 2019 hacia arriba, lo que no afecta. En horizontal 1 a la derecha dos veces, 2018 a la izquierda y 1 a la izquierda dos veces.

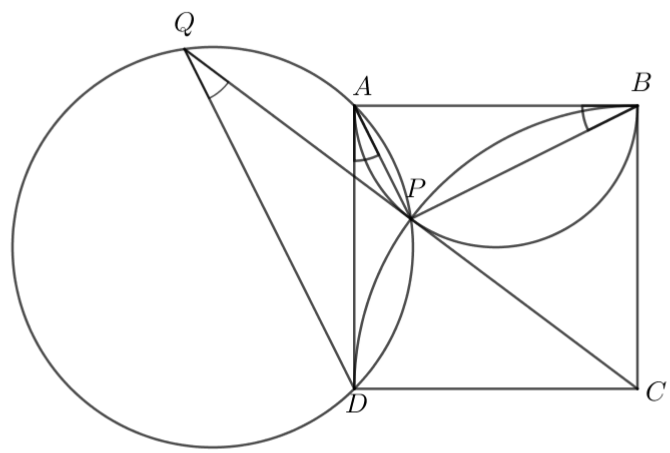
Terminaremos 1008 arriba y 1010 a la izquierda.

Criterio Propuesto

Separar horizontal/vertical.	1
Notar que hay un ciclo de 4.	2
2 a izquierda o 2 a derecha.	3
Concluir.	1

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrado. La semicircunferencia de diámetro AB trazada por adentro del cuadrado interseca a la circunferencia de centro C y radio BC en P. La recta CP interseca al circuncírculo del $\triangle APD$ en Q (distinto de P). Demuestra que $\angle BCQ = 2\angle DQC$.

Solución 7. Como $\angle DAP$ abre el arco DP, tenemos que $\angle DQP = \angle DAP$. Además, $\angle DAP + \angle PAB = 90° = \angle BPA$, por lo que $\angle ABP = \angle DQP$. Por último notemos que $\angle ABP$ es un ángulo semi-inscrito de la cirunferencia de centro C y radio BC, y como el ángulo central $\angle PCB$ abre el mismo arco que $\angle ABP$, $\angle BCQ = \angle BCP = 2\angle ABP = 2\angle DQC$, como queríamos.



Solución 7. Alternativa Como $\angle DAP$ abre el arco DP, tenemos que $\angle DQP = \angle DAP$. Además, $\angle DAP + \angle PAB = 90° = \angle BPA$, por lo que $\angle ABP = \angle DQP$. Tenemos que $\angle PAB = \angle PBC = \angle CPB$, y como $2\angle PBA + 2\angle PAB = 180° = 2\angle PBC + \angle BCP$, obtenemos el resultado.

Criterio Propuesto

$\angle DQP = \angle DAP$	1
$\angle ABP = \angle DQP$	2
Decir que el círculo es tangente a AB o $\angle PAB = \angle PBC = \angle CPB$	3
Concluir.	1

Problema 8. Los números $p < q < r < s$ son cuatro números primos tales que

$$p^2 + q + s = pqr$$

y

$$rs - 1 = pq + p^2q^2 + p^3q^3.$$

Encuentra el valor de $p^2qs - 1$.

Solución 8. Si los cuatro primos fueran impares, en la segunda ecuación tendríamos una contradicción, pues $rs - 1$ sería un par, pero el lado izquierdo es la suma de tres impares. Luego, uno de ellos es par y, como están ordenados, $p = 2$.

Transformamos la segunda ecuación en

$$rs = 1 + pq + p^2q^2 + p^3q^3 = (1 + pq)(1 + p^2q^2)$$

Como $1 + pq > 1$ y $r < s$, tenemos que $r = 1 + pq, s = 1 + p^2r^2$. Si sustituimos en la primera ecuación, tenemos

$$p^2 + q + (1 + p^2q^2) = pq(1 + pq) = pq + p^2q^2$$

Restando p^2q^2 de ambos lados, y sustituyendo $p = 2$, tenemos que $q + 5 = 2q$, de donde $q = 5$. Con esto podemos saber que $r = 11, s = 101$.

Finalmente, encontramos que $p^2qs - 1 = 2019$.

Criterio Propuesto

$p = 2$	2
Factorización.	2
Sustitución.	2
Concluir.	1

Problema 9. Se tiene un triángulo equilátero de papel cuyo lado mide 2019. En cada una de las tres esquinas se va a recortar un triángulo equilátero cuyo lado tenga longitud entera. Estos tres triángulos pueden medir distinto. El triángulo recortado de la esquina de arriba se pinta de dorado, el triángulo recortado de la esquina izquierda se pinta de plateado y el recortado de la esquina derecha se pinta de negro. ¿De cuántas formas se pueden hacer los cortes?

Solución 9. Sean $0 < a, b, c < 2019$ las medidas de los tres triángulos que se colorean. Sabemos que $a + b, b + c, c + a \leq 2019$. Consideramos dos casos: (1) cuando el lado de alguno de los tres triángulos es mayor a 1008, (2) cuando el lado de cada uno de los tres triángulos es menor o igual a 1006.

Caso (1). Si alguno de a, b, c es mayor a 1008, entonces cada uno de los otros dos es menor o igual a 1006, de modo que su suma sería menor a 2019 y eso garantiza que no se traslapen. Para cada valor distinto de $a > 1008$, las maneras de elegir b, c son $(2019 - a)^2$. Entonces, en este caso tenemos $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 1010^2)$, coloraciones distintas, considerando que el mayor puede ser cualquiera de a, b, c.

Caso (2). Si cada uno de a, b, c cumple que $0 < a, b, c \leq 1008$, entonces cada uno de ellos tiene 1008 opciones distintas. En este caso tenemos 1008^3 coloraciones distintas.

En total, tenemos

$$\frac{(1010)(1011)(2021)}{2} + (1008)^3 = 2,056'024,167$$

coloraciones distintas.

Criterio Propuesto

Separar los casos.	2
Caso $a, b, c \leq 1009$.	2
Caso $a > 1009$.	3