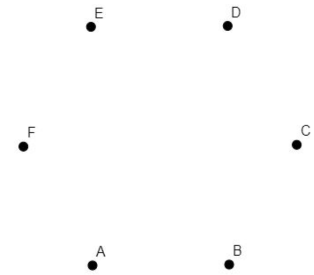
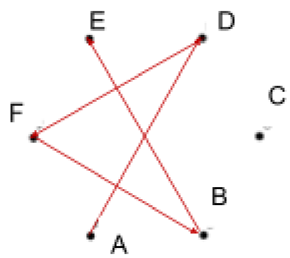
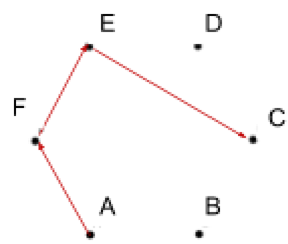
Soluciones Examen Semifinal
33a Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Aguascalientes
8 de Junio de 2019, Universidad Autónoma de Aguascalientes

Problema 1. Después del reciente rompimiento de relaciones de una popular empresa de celulares con la plataforma que le brindaba su sistema operativo, ha decidido crear su propio sistema operativo. Uno de los aspectos más importantes para un teléfono celular es contar con una clave para que solo el usuario pueda desbloquear su teléfono. Imitando un poco el aspecto más popular, han decidido implementar un bloqueo de patrón, en una figura de seis puntos como la de la derecha, cada punto con una letra de la A a la F.



La manera en la que funciona un patrón de bloqueo es que se tienen que unir al menos cuatro puntos de los de la figura con segmentos de línea, de tal forma que el inicio del siguiente segmento sea el final del segmento anterior; y de tal forma que hay un punto inicial y otro final, distintos entre sí. Cada punto puede ser utilizado a lo más una sola vez. Estos son ejemplos de patrones válidos:





¿Cuál es la cantidad de patrones de desbloqueo distintos que se pueden formar?
Nota: *Para un patrón de bloqueo, lo que nos interesa es el orden en el que se forma la línea. De esta manera, se cuentan como distintos los patrones A-F-E-C y C-E-F-A, aunque al final formen la misma figura. También se consideran diferentes los patrones que se obtienen de girar o voltear otros patrones.*

Solución Problema 1

Vemos que el problema se puede reducir a contar el orden en el que pueden ser tomados al menos cuatro puntos de seis. Considerando que es importante el orden en el que tomemos los puntos, la solución del problema son las permutaciones que se pueden hacer con al menos cuatro puntos. Dividimos en tres casos que calcularemos individualmente, para después sumarlos.

- Patrones de cuatro puntos: Tenemos cuatro puntos disponibles de seis, obtenemos las permutaciones que son $6P4 = \frac{6!}{2!} = 6\times5\times4\times3 = 360$
- Patrones de cinco puntos: Tenemos cinco puntos disponibles de seis. Las permutaciones son $6P5 = \frac{6!}{1!} = 6\times5\times4\times3\times2 = 720$
- Patrones de seis puntos: Tenemos seis puntos disponibles de seis. Las permutaciones son $6P6 = \frac{6!}{0!} = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

Así, la respuesta es $360 + 720 + 720 = 1800$ posibles patrones de bloqueo.

Problema 2. Se tiene un pentágono regular ABCDE, y un punto F dentro de él, de tal forma que ABCF es un rombo. Encuentra los ángulos del triángulo DFE y demuestra que es semejante al triángulo ABC.
Nota: *Recuerda que un rombo es un cuadrilátero cuyos cuatro lados son de la misma longitud.*

Solución Problema 2

Se observa que como ABCF es rombo, entonces también es paralelogramo y podemos calcular sus ángulo teniendo el ángulo interno del pentágono, que es igual a $\frac{180°(5-2)}{5} = 108°$. El otro ángulo del rombo será pues $180° - 108° = 72°$, por lo cual el ángulo <FAB será 72°. Luego el ángulo <EAF será igual a la resta de los ángulos <EAB y <FAB, que miden 108° y 72° respectivamente. Luego el ángulo EAF mide 36°. Posteriormente, como el ABCF es rombo, y el pentágono ABCDE es regular, entonces EA=FA y el triángulo EAF es isósceles. Por lo cual el ángulo <AEF=<AFE y ambos sumados al <EAF=36° deben de

dar 180° por lo cual <AEF=<AFE=72°. Luego, <DEF=<DEA-<FEA=108°-72°=36°. Se puede hacer lo mismo del otro lado para concluir que <EDF=36°, luego se observa que el triángulo DEF es isósceles entonces con ángulo 36°, 36° y 108°. Es fácil ver que el triángulo ABC tiene los ángulos <ABC=108° y por ser el pentágono regular, también es triángulo isósceles, por lo cual sus otros ángulos miden 36° y entonces por el criterio ángulo-ángulo es semejante al triángulo DEF, que es lo que quería demostrar.

Problema 3. Toño escribe en un pizarrón las primeras 2019 potencias de dos comenzando por 1, 2, 4, y así sucesivamente hasta 2^{2018}. Le pide a Gustavo que multiplique todas las potencias que escribió y le diga el resultado, sin embargo, Gustavo sabe que le resultaría un número muy grande, por lo cual sólo le dirá a Toño la última cifra del número resultante. ¿Cuál es la última cifra resultante de multiplicar las primeras 2019 potencias de dos?

Solución Problema 3

Observación inicial fundamental: La última cifra del producto de dos números es igual a la última cifra del producto de las últimas cifras de ambos números.

Primera solución. Se observa que multiplicar $2^0 \times 2^1 \times 2^2 \times ... \times 2^{2017} \times 2^{2018}$, usando las leyes de los exponentes es lo mismo que $2^{0+1+2+...+2017+2018} = 2^{\frac{2018\times2019}{2}}$ y utilizando la fórmula de Gauss podemos llegar a la segunda expresión. Nos basta luego ver que las potencia de dos acaban en las cifras 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, … y así sucesivamente a partir del 2^1, repitiéndose en bloques de 4 cifras. Por lo tanto nos basta ver cuál es el residuo del $\frac{2018\times2019}{2}$ al dividirlo entre 4 y así sabremos la última cifra de la potencia de 2. Primero sabemos que 1009×2019 es impar, luego, lo podemos escribir como $(1000+9)(2000+19) = 1000 \times 2000 + 9 \times 2000 + 19 \times 1000 + 9 \times 19$, todo lo que quede multiplicado por algún millar será divisible entre 4 y no aportará o cambiará el residuo, por lo cual sólo nos importa el residuo de $9 \times 19 = 171$, cuyo residuo es 3 al dividirlo entre 4. Por lo cual la última cifra de la potencia deseada deberá ser 8.

Segunda solución. Se observa el patrón descrito en la solución anterior, entonces la multiplicación será equivalente a $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 6 \times ... \times 2 \times 4 \times 8 \times 6 \times 2 \times 4$, que será equivalente a la multiplicación de $2^{505} \times 4^{505} \times 6^{504} \times 8^{504} \times 1$. Ahora sólo hay que ver los patrones de cada una de las potencias que se están mutiplicando. Para 2^{505} sólo hay que ver el patrón de las potencias de 2, como el residuo de 505 al dividirlo entre 4 es 1, entonces su última cifra será 2. Luego 4^{505} y 8^{504} son respectivamente iguales a las potencias 2^{1010} y 2^{1512}; en la primera, el residuo del exponente al dividirlo entre 4 es 2, por lo cual terminará en 4 y en la segunda el residuo es 0, por lo cual terminará en 6. Otra forma de verlo es ver los patrones de las potencias de 4 y 8 que son de longitud 2 y 4 respectivamente (4, 6, 4, 6, ... para el caso de las potencias de 4 y 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, … para el caso de las potencias de 8). De cualquier forma el residuo de 505 será 1 al dividirlo entre dos y el de 504 al dividirlo entre 4 será 0, por lo cual de igual forma se concluye que terminan en 4 y 6 respectivamente. Por último, las potencias de 6 terminan siempre en 6. Ahora pues la multiplicación nos queda que debe de terminar en la misma cifra que la multiplicación de las últimas cifras, es decir buscamos la última cifra de $2 \times 4 \times 6 \times 6 \times 1 = 288$, por lo cual el número pedido termina en 8.

Problema 4. Óscar está fascinado con un nuevo tipo de números primos que descubrió, los números “Primates”. Un número “Primate”, es un número primo que cumple los siguientes requisitos:

a. Todas sus cifras son números primos.
b. Todos los números que se pueden formar por cifras contiguas del número también son números primos.

Encuentra todos los números Primates que existen. **Justifica por qué son todos.**

Por ejemplo, los números que se pueden formar con cifras contiguas del número 4127 son 41, 12, 27, 412, 127. Sin embargo, el número 4127 no es “Primate”, porque aunque es un número primo, algunas de sus cifras no son números primos (1 y 4); también, algunos de los números que se pueden formar con cifras contiguas del número no son números primos (12, 27 y 412).

Nota: *Recuerda que un número primo, es aquél que es divisible exactamente por dos números enteros positivos. En particular, el número 1, no es un número primo.*

Solución Problema 4

Una primera observación es que los números que se pueden formar por cifras contiguas de un primate son primates también.

Los primates de una cifra son 2, 3, 5 y 7. Los primates de dos cifras son 23, 37, 53 y 73.

Como estos últimos primates conforman a los otros primates, podemos deducir que en todo primate de más de dos cifras, la cifra a la derecha de un 2 es un 3, a la de un 3 es un 7, a la de 5 es un 3 y a la de 7 es un 3.

Ahora bien, 237, 537 y 737 no son primos y, por lo tanto, no son primates. Así que ningún primate los contiene. En específico, ningún primate de más de dos cifras empieza con 2, 5 o 7. El único primate de 3 cifras es 373.

El único posible primate de 4 cifras es 3737, pero contiene al 737 y no es primo. Por lo tanto, no hay primates de 4 cifras o más.

En resumen, los primates son 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 y 373.