Problemas

1. Demostrar que si un número primo es de la forma 3k+1 entonces es de la forma 6k+1
2. Demostrar que si un número primo es de la forma 3k+2, entonces es de la forma 6k+5
3. Demuestra (usando el algoritmo de la división) las propiedades de la paridad en la suma, resta y multiplicación.
4. ¿Cuál es el residuo de dividir 2n entre n-1?
5. ¿Cuál es el residuo de dividir $n^2 - 1$ entre n?
6. Demostrar que 3, 5 y 7 es la única terna de números primos que son impares consecutivos.
7. ¿Cuáles son los posibles residuos de un número primo al dividirlo entre 4? ¿y entre 6?
8. Encuentra todas los enteros positivos n tales que n divide a $3n+7$
9. ¿Cuántos números n existen menores o iguales a 2019 tales que el cociente de dividir n entre 100 y el residuo de dividir n entre 100 es múltiplo de 11?
10. Demuestre que si m es un número impar, entonces $2m$ es un número de la forma $4k+2$.
11. Se tiene un número de la forma $3k+2$ y de la forma $2q+1$ al mismo tiempo. ¿Qué residuo deja al dividirlo entre 6?
12. Sea N = 20172017 . . . 2017, el número formado al pegar 2017 veces el 2017. ¿Cuál es el número más cercano a N que es múltiplo de tres?.
13. Encuentra el menor número tal que al dividirlo entre 2, deja residuo 1; al dividirlo entre 3 deja residuo 1, al dividirlo entre 4 deja residuo 1, al dividirlo entre 5 deja residuo 1, al dividirlo entre 6 deja residuo 1 y al dividirlo entre 7 deja residuo 1.
14. Encuentra el menor número tal que al dividirlo entre 2, deja residuo 1; al dividirlo entre 3 deja residuo 2, al dividirlo entre 4 deja residuo 3, al dividirlo entre 5 deja residuo 4, al dividirlo entre 6 deja residuo 5 y al dividirlo entre 7 deja residuo 6.
15. Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.
16. Tres hermanos heredan n piezas de oro, con pesos 1, 2, 3...n. ¿Para qué n pueden repartirse las piezas?
17. Encuentra cinco números primos tales que están en progresión aritmética de diferencia 6, demuestra que no hay otro grupo de cinco primos con esa condición.
18. Demuestra que para todo entero a impar, $a^2 - 1$ es divisible por 4
19. Demuestra que para todo entero a impar, $a^2 - 1$ es divisible por 8
20. Demuestra que si dos números enteros a y b cumplen que su producto es 12313942398007, entonces uno de ellos es de la forma 4k+1 y el otro de la forma 4q+3.
21. ¿Cuáles son los dos últimos dígitos de 11^{2010}?
22. Demuestra que 1000000000000000003 tiene un divisor primo de la forma 4k+3
23. ¿Por qué es mejor hacer la criba de Eratóstenes con 6 columnas que con 10?
24. Demuestra que todo número de la forma 4k+3 tiene un factor primo de la forma 4k+3. ¿Es cierto lo mismo con los números de la forma 4k+1?
25. Demuestra que hay un número infinito de números primos de la forma 4k+3 (Sugerencia: observa la demostración de que hay infinitos primos y trata de hacer algo parecido pero haciendo que te resulte un número de la forma 4k+3)
26. Se define la siguiente función f(n)
    a. Si n es un número de la forma 3k, entonces f(n)= $\frac{n}{3}$
    b. Si n es un número de la forma 3k+1, entonces f(n)= $2n+1$

c. Si n es un número de la forma 3k+2, entonces f(n)= $2n-1$

Demuestre que para todo entero n, se puede llegar al número 1 aplicando sucesivamente la función (es decir, que existe un entero i tal que si aplicamos sucesivamente la función a un número i veces, llegamos al número 1).

27. Demuestre que sin importar qué números enteros naturales sean m y n, el número $mn(m+n)(m-n)$ es divisible siempre por 3.
28. Sean p y q primos distintos, ambos mayores a tres. Probar que si p − q es una potencia de 2, entonces p+q es divisible por 3.
29. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, k) que satisfacen $n^3 - 2 = k!$
30. Encuentre todos los números primos p tales que el número $2p+5$ es el cuadrado de un número entero.
31. Justifica porque el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.
32. Demuestre el criterio de divisibilidad del 11.
33. Sea p_n el n-ésimo número primo. Demuestre que el número $p_1 \times p_2 \times p_3 \times ... \times p_n + 1$ no puede ser el cuadrado de un número entero.
34. Demuestra que para toda n, existen n enteros consecutivos que son compuestos (Sugerencia: ¿Qué pasa si el primero de ellos fuera $(n+1)!+2$?
35. Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 cuatro números primos distintos tales que $2p_1 + 3p_2 + 5p_3 + 7p_4 = 162$, $11p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 = 162$. Encuentra todos los posibles valores del producto $p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4$.
36. Se sabe que para un número natural n, el número $n^3 + 2009n + 27n$ termina en 3. Encuentra los tres últimos dígitos del número (Sugerencia: "Divide" entre 1000 y observa el residuo, ¿qué pasa si le sumas 27 al residuo?)
37. ¿De qué forma pueden ser los números cuadrados perfectos al dividirlos entre 2? ¿entre 3? ¿entre 4? ¿entre 5?
38. Demuestra que si a es un número impar y no es múltiplo de 3, entonces $24 \mid a^2 - 1$
39. Demuestre que si el residuo de dividir un número x entre n se denota como $r_n(x)$, entonces:
    a. $r_n(r_n(x) + r_n(y)) = r_n(x+y)$
    b. $r_n(r_n(x) \cdot r_n(y)) = r_n(x \cdot y)$
40. Demuestra que un número es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9 (criterio del 9).
41. Demuestra que si la suma de los dígitos de un número n es s, entonces $r_9(n) = r_9(s)$
42. Calcula el resto de la división de $(34210987654345664321345567)^2$ entre 9.
43. Sean a, b y c enteros tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Prueba que:
    a. a o b es par
    b. a o b es divisible por 3
    c. a o b o c es divisible por 5
    d. a o b es divisible por 4
44. Probar que ningún entero positivo de la forma 8k + 7 puede expresarse como la suma de tres cuadrados enteros