Teorema fundamental de la aritmética y números primos I

Números primos

Problema 1. Determina todos los primos entre 1 y 50

Problema 2. Encuentra todos los números primos positivos menores a 100. ¿Cuántos son?

Problema 3. ¿Es 2011 primo?

Problema 4. Encuentra todos los números primos p y q tales que p+q=pq

Problema 5. El producto de un número de dos cifras con uno de tres cifras es 23,871. ¿Cuánto vale su suma?

Factorización de números

Problema 6. El producto de tres enteros positivos es 180 y su suma es 23. ¿Cuál es el mayor de esos tres números?

Problema 7. Hugo abre su libro de matemáticas y observa que el producto de los números de las dos páginas es 1806. ¿Cuánto vale la suma de los dos números?.

Problema 8. Hugo olvido la contraseña de su computadora. Como Hugo es muy precavido, anotó en su libreta que lo siguiente: La contraseña es un número de cuatro dígitos, el 6 no es uno de los dígitos y el producto de los dígitos es 420. ¿Cuál es la suma de los dígitos de la contraseña de Hugo?

Problema 9. ¿Cuál es la mayor potencia de 2 que divide al resultado de la suma $1+2+3+...+10^{11}$?

Problema 10. Encuentra la descomposición canónica de 6916

Problema 11. El producto de los dígitos de un número de cuatro cifras es 810. Si ninguno de los dígitos se repite, la suma de estos dígitos es:

Problema 12. Toño suma los número del 1 hasta el 10^{2019}. ¿Cuántos factores dos tiene el resultado en su factorización en primos?

Problema 13. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 2?

Problema 14. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 5?

Problema 15. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 8?

Problema 16. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 9?

Problema 17. ¿Es $2^9 \times 3$ divisible por 6?

Problema 18. En cada cara de un cubo se escribe un número entero positivo. En cada vértice del cubo, se escribe la multiplicación de las tres caras en las que aparece ese vértice como esquina. Se suman los números escritos en cada uno de los vértices, dando el resultado de 5005.

Problema 19. El producto de tres enteros mayores que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuáles son los tres enteros?

Problema 20. ¿Es cierto que si un número es divisible por 4 y 3, entonces es divisible por 12?

Problema 21. ¿Es cierto que si un número natural es divisible por 4 y 6, entonces es divisible por 24?

Problema 22. Factoriza el número 420

Problema 23. El número A no es divisible por 3. ¿Es posible que 2A sea divisible por 3?

Problema 24. Demuestra que la multiplicación de 5 enteros consecutivos es múltiplo de 120

Problema 25. Demuestra que la multiplicación de 4 enteros consecutivos siempre es múltiplo de 24

Problema 26. Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \le b \le c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

Problema 27. Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a 10n que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Ceros al final de un número

Problema 28. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{2009} \times 5^{2013}$?

Problema 29. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{1998} \times 5^{2002}$?

Problema 30. ¿Cuántas cifras tiene el número $3^2 \times 2^{2017} \times 5^{2018}$?

Problema 31. ¿Qué número es mayor $2^{1999} \times 3^{2003} \times 5^{2001}$ o $2^{2003} \times 3^{2015} \times 5^{1999}$?

Problema 32. ¿Cuál es la suma de los dígitos de $2^{2017} \times 5^{2020}$?

Factorización de potencias perfectas

Problema 33. ¿Cuál es el menor número por el que debes multiplicar a 750 para obtener un cuadrado perfecto?

Problema 34. Encuentre el menor número tal que es un cubo perfecto y al dividirlo entre 2 es un cuadrado perfecto.
Problema 35. Sea n un entero mayor que cero tal que los números n × 1998 y n × 2695 son cuadrados perfectos.
Problema 36. ¿Cuál es el menor número tal que al dividirlo entre 2 resulta un cuadrado perfecto y al dividirlo entre 3 resulta un cubo perfecto?
Problema 37. Encuentre el menor número tal que al multiplicarlo por 2 es un cuadrado perfecto, al multiplicarlo por 3 resulta un cubo perfecto y al multiplicarlo por 5 resulta una quinta potencia perfecta.
Problema 38. El número $25^{64} \times 64^{25}$ es el cuadrado de un entero positivo N. ¿Cuál es la suma de los dígitos de N?
Problema 39. Demuestra que si el cuadrado de un número divide al cuadrado de otro número, entonces el primer número divide al segundo.

Factorización de números factoriales, divisibilidad repetida

Problema 40. Jimena multiplica los números del 1 al 2012 ($1 \times 2 \times 3 \times ... \times 2011 \times 2012$) y posteriormente el resultado lo divide entre 14 sucesivamente hasta que el resultado ya no dé entero. ¿Cuántas veces dividió el número entre 14?
Problema 41. ¿Cuántos ceros hay al final de $10!$?
Problema 42. ¿Cuántos ceros hay al final de $100!$?
Problema 43. Alice y Bob juegan un juego, empiezan con el número 100! escrito en el pizarrón, juegan alternando turnos, en cada turno se borra el número del pizarrón y en su lugar se escribe la tercera parte del número que estaba. Pierde el que escriba un número que no es entero. Si empieza Alice ¿Quién gana?
Problema 44. Encuentra una forma general para saber cuántos ceros al final hay de n!

Divisores y Número de divisores

Problema 45. Encuentra la menor pareja de números enteros consecutivos tales que cada uno de ellos tiene exactamente 6 divisores.
Problema 46. Escribe todos los divisores positivos del 168
Problema 47. ¿Cuántos divisores tiene el número 96?
Problema 48. Determina cuántos enteros positivos dividen a $5^8 + 2 \times 5^9$
Problema 49. ¿Cuántos divisores tiene el número 25? ¿Y el número 100? Demuestra que la única forma en que puede un número tener una cantidad impar de divisores, es que el número sea un cuadrado perfecto.
Problema 50. ¿Cuántos números dividen a 360?
Problema 51. Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos a_i que tienen exactamente 3 divisores: $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ ¿Qué número es a_6?
Problema 52. Se ordenan de menor a mayor los enteros positivos a_i que tienen exactamente 7 divisores: $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ ¿Qué número es a_3?
Problema 53. ¿Cuántos divisores tiene el $10!$?
Problema 54. ¿Cuánto vale la multiplicación de los divisores del $10!$?
Problema 55. ¿Cuánto es la suma de los divisores de $10!$?
Problema 56. Demuestra que el número de divisores de un número N, siempre es menor o igual a $2\sqrt{N}$.
Problema 57. Un número natural n, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores. Hallar n sabiendo que es el menor número que cumple las condiciones anteriores.
Problema 58. La factorización en primos de N es $p_1{}^{a_1} p_2{}^{a_2} p_3{}^{a_3} ... p_r{}^{a_r}$ 1) ¿Cuántos divisores tiene? 2) ¿Cuánto es el producto de sus divisores? 3) ¿Cuánto es la suma de sus divisores?

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Problema 57. ¿Cuántos enteros positivos dividen tanto a 360 como a 600?
Problema 58. Encuentra el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de A y B, siendo $A = 2^8 \times 5^3 \times 7$ y $B = 2^5 \times 3 \times 5^7$
Problema 59. Demuestra que si n es divisible por 12 y 18, entonces n es divisible entre 36.
Problema 60. Demuestra que si n divide a 12 y n divide a 18, entonces n divide a 6

Problema 61. Encuentra el mcd y el mcm de 168 y 420
Problema 62. ¿Cómo puedes obtener el mínimo común divisor y el máximo común múltiplo de dos números?
Problema 63. Dos números cuyo mcd es 18, multiplicados dan 720, encuentra el mcm.
Problema 64. Demuestra que mcd(a,b) * mcm[a,b] = ab
Problema 65. Demuestra que si a y b son tales que mcd(a, b) + mcm[a, b] = a + b, entonces alguno divide al otro.