
XIX ONMAPS. Tepic, Nayarit 2019

Examen del Primer día.

31 de Mayo de 2019

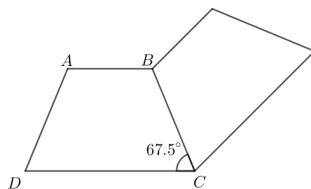
Problema 1. Decimos que un número de cuatro dígitos es *tepiqueño* si es impar, la suma de sus dígitos es 12 y la multiplicación de sus dígitos es 0. ¿Cuál es la resta del *tepiqueño* más grande menos el *tepiqueño* más pequeño?

Problema 2. Decimos que un número está *derecho* si cada uno de sus dígitos cumple las siguientes condiciones:

- Si el dígito es par, indica la cantidad de dígitos impares que hay a su derecha.
- Si el dígito es impar, indica la cantidad de dígitos pares que hay a su derecha.

Encuentra todos los números *derechos* de 8 dígitos.

Problema 3. Zeus tiene varios trapecios isósceles iguales al $ABCD$ de la figura, tales que AB es paralelo a CD , DC es el doble de AB y con área igual a 24 cm^2 . Los puede pegar por un lado de cada trapecio como se muestra en la figura, hasta que un lado de un trapecio coincida con el lado AD , dando como resultado dos polígonos regulares, uno chico y uno grande que contiene al chico. ¿Cuál es el área total del polígono grande?



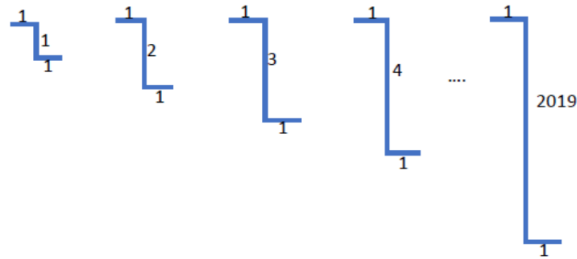
Problema 4. Orlando tiene algunos tableros de 3×3 cada uno con los números del 1 al 9 iguales a los de la figura, y colorea las casillas de blanco o negro de la siguiente forma: elige dos tableros y un número, y en el primer tablero cambia de color (de negro a blanco o de blanco a negro) las tres casillas de la columna en la que está el número elegido mientras que en el segundo tablero cambia de color las tres casillas del renglón en el que está el mismo número elegido. Si inicialmente todos los tableros son blancos y quiere colorearlos a negro repitiendo el proceso las veces que sea necesario.

- ¿Podrá hacerlo si tiene 2018 tableros?
- ¿Podrá hacerlo si tiene 2019 tableros?

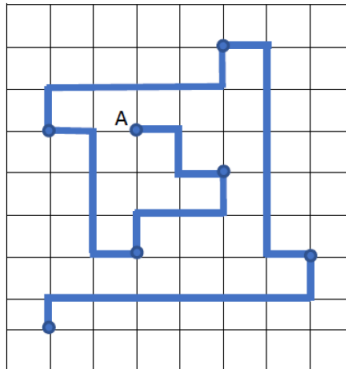
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Problema 5. Decimos que un número entero n mayor que cero es *exótico* si de entre los divisores de n que sean mayores que 1, puedes encontrar alguno cuya suma de dígitos es 9, otro cuya suma de dígitos es 8, otro cuya suma de dígitos es 7, y así sucesivamente hasta uno cuya suma de dígitos es 1. ¿Cuál es el segundo número exótico más pequeño que también es un cuadrado perfecto?

Problema 6. Isaac tiene 2019 piezas de la siguiente forma



y las acomoda en un tablero cuadrado de la siguiente forma



acomodando las 2019 piezas siguiendo el patrón de la figura de arriba. ¿Cuántos cuadros en vertical y en horizontal hay para llegar desde el punto A hasta el final de la pieza 2019? Por ejemplo: Desde el punto A hasta el final de la pieza 6 hay 5 hacia abajo y 2 hacia la izquierda.

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrado. La semicircunferencia de diámetro AB trazada por adentro del cuadrado interseca a la circunferencia de centro C y radio BC en P . La recta CP interseca al circuncírculo del $\triangle APD$ en Q (distinto de P). Demuestra que $\angle BCQ = 2\angle DQC$.

Problema 8. Los números $p < q < r < s$ son cuatro números primos tales que

$$p^2 + q + s = pqr$$

y

$$rs - 1 = pq + p^2q^2 + p^3q^3.$$

Encuentra el valor de $p^2qs - 1$.

Problema 9. Se tiene un triángulo equilátero de papel cuyo lado mide 2019. En cada una de las tres esquinas se va a recortar un triángulo equilátero cuyo lado tenga longitud entera. Estos tres triángulos pueden medir distinto. El triángulo recortado de la esquina de arriba se pinta de dorado, el triángulo recortado de la esquina izquierda se pinta de plateado y el recortado de la esquina derecha se pinta de negro. ¿De cuántas formas se pueden hacer los cortes?