Problemas para el entrenamiento

P1. Demuestra que n 3 + 2n es divisible por 3 para cualquier n´umero entero positivo n que se elija.

P2. Demuestra que n 5 + 4n es divisible por 5 para cualquier entero positivo n.

P3. Demuestra que a(a + 1)(2a + 1) es divisible por 6 para todo entero positivo a.

P4. Encuentra el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de A y B, siendo $A = 2^8 \times 5^3 \times 7$ y $B = 2^5 \times 3 \times 5^7$

P5. Se tienen tres varillas de longitud 60cm, 80cm y 100cm respectivamente. Se quieren dividir en pedazos de la misma longitud sin que sobre, ni falte nada. Encuentra tres longitudes posibles para los pedazos que se desean.

P6. Se tienen 3 cajas que contienen 1600kg, 200kg y 3392kg de jabón respectivamente. El jabón de cada caja está dividido en bloques del mismo peso en todas las cajas y es el mayor peso posible. ¿Cuánto pesa cada bloque y cuántos bloques hay en cada caja?

P7. Juan tiene un terreno rectangular de 40 metros por 96 metros. Sio se divide su terreno en parcelas cuadradas iguales y planta al interior de cada parcela tres árboles, ¿Cuál es el mínimo número de árboles que podría plantar?

P8. En una fiesta se tienen canastas con fruta. En la de manzanas hay 24, en la de los plátanos hay 16, en la de las peras hay 80, en la de los mangos 32 y en la de los kiwis 40. Si a cada persona en la fiesta le tocó la misma cantidad de fruta de cada clase, ¿cuál es el máximo número de personas que pudieron haber asistido a la fiesta?

P9. Demuestra que si n es divisible por 12 y 18, entonces n es divisible entre 36.

P10. Demuestra que si n divide a 12 y n divide a 18, entonces n divide a 6

P11. Encuentra el mcd y el mcm de 168 y 420

P12. ¿Cuántos enteros positivos dividen tanto a 360 como a 600?

P13. Sean p y q números primos distintos. Demuestre que un entero es divisible entre pq si y sólo si es divisible entre p y entre q. Deduzca los criterios de divisibilidad entre 6 y entre 10.

P14. Andrea, Bárbara y Carlos van a una dulcería, Andrea compra cajas con 5 chocolates cada una, Bárbara compra cajas con 10 paletas cada una, Carlos compra cajas con 9 chicles cada una. sI quieren tener la misma cantidad de dulces, ¿cuántas cajas mínimo comprarán entre los tres?

P15. Un faro se enciende cada 12 segundo, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 6:30 de la tarde, los tres coinciden. Averigua las veces que volverán a coincidir en los 5 minutos siguientes.

P16. ¿Cuál es el menor número que al dividirlo separadamente por 15, 20, 36 y 48, en cada caso, da de residuo 9?

P17. Un sol de cierta galaxia emite 3 diferentes rayos de la siguiente manera: el rayo alfa cada 16 segundos, el rayo beta cada 45 segundos y el rayo gama cada 140 segundos. Si en este momento se emiten al mismo tiempo los 3 rayos, ¿dentro de cuántos segundos se volverán a emitir los 3 rayos al mismo tiempo?

P18. Sean a, b, c, d, e enteros positivos que satisfacen 5a = 4b = 3c = 2d = e y k = a + 2b + 3c + 4d + 5e. Encuentra el menor valor que puede tomar k.

P19. Encuentra el mayor número de 4 dígitos que al dividirse entre 2, 3, 4, 5, 6, y 7, deja residuo 1 en cada caso.

P20. Halla todas las ternas de números enteros positivos a ≤ b ≤ c primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

P21. ¿Cómo puedes obtener el mínimo común divisor y el máximo común múltiplo de dos números sabiendo su factorización en números primos?

P22. Demuestre que si la suma de dos enteros positivos a, b es un número primo entonces (a, b) = 1

P23. Dos números cuyo mcd es 18, multiplicados dan 720, encuentra el mcm.

P24. Demuestra que si a y b son tales que mcd(a, b) + mcm[a, b] = a + b, entonces alguno divide al otro.

P25. Demuestra que una pareja de n´umeros naturales n y nk + 1 siempre son primos relativos, para cualquier valor entero no negativo de k.

P26. Si d|a y d|b, y existen u y v tales que d=ua+vb, entonces d=(a,b).

P27. Si a, b, c y d son enteros, demuestra que:

a) Si (a,b)=d y $d \neq 0$, entonces ($\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$)=1
b) Si (a,b)=d, entonces (ka, kb) = |k| d
c) (a, b+ka)=(a,b)
d) Si (a,b)=d, y (c,b)=1, entonces (ac,b)=d

P28. Si (a,b)=1, y a|c y b|c, implica que ab|c

P29. Si (a,b)=1, a|bc, implica que a|c

P30. Demuestra que, dados dos enteros positivos a y b distintos de cero con a no divisible entre b, si q y r son enteros tales que a = bq + r, entonces mcd(a, b) = mcd(b,r)

P31. Si a es primo, mayor a 5, entonces $a^4 - 1$ es divisible entre 240

P32. Sean a y b dos números primos relativos:

a) Calcula todos los valores posibles del mcd(3a-b, 2a+b)
b) Calcula todos los valores posibles de mcd(2a-5b, 4a+3b)

P33. ¿Cuánto vale el mcm[a,a]?

P34. Dados enteros positivos a y b, muestre que $(a^n,\ b^n) = (a,b)^n$

P35. Encuentra el $mcd(2^{100} - 1,\ 2^{120} - 1)$.

P36. Si n es un entero, y el mcd(a,b)=1, pruebe que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a n + 2.

P37. Encontrar las condiciones en que ocurre:

a) mcm[a,b]=mcd(a,b)
b) mcm[a,b]=|ab|

P38. Demuestra que mcm[a,mcm[b,c]]=mcm[mcm[a,b],c]

P39. Si D>0, y d|a y d|b, entonces mcm[$\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$]= $\frac{mcm[a,b]}{d}$

P40. Encuentre el mcd de 2n+13 y n+7.

P41. Demuestre que la fracción $\frac{n+1}{n+2}$ es irreducible.

P42. Demuestre que la fracción $\frac{12n+1}{30n+2}$ es irreducible.

P43. Demuestre que la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible.

P44. Si a|k y b|k, entonces mcm[a,b]|k

P45. Demuestra que si m= $\frac{|ab|}{(a,b)}$, entonces:

a) [a,b]|m
b) m|[a,b]
c) mcd(a,b) * mcm[a,b] = ab

<u>Tarea moral para casa</u>

P46. Hugo abre su libro de matemáticas y observa que el producto de los números de las dos páginas es 1806. ¿Cuánto vale la suma de los dos números?.

P47. El número A no es divisible por 3. ¿Es posible que 2A sea divisible por 3?

P48. Justifica porque el producto de cualesquiera 3 números naturales consecutivos es divisible entre 6.

P49. Justifica porque el producto de cualesquiera 5 números naturales consecutivos es divisible entre 120.

P50. Determine todos los enteros positivos n tales que 101 es divisor de 111 . . . 1, donde 111 . . . 1 es el número formado por n cifras uno.

P51. Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a 10n que no son múltiplos de 2 ni de 5.

P52. Demuestra que si el cuadrado de un número divide al cuadrado de otro número, entonces el primer número divide al segundo.

P53. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (n, k) que satisfacen n^3 − 2 = k!

P54. Demuestre que sin importar qué números enteros naturales sean m y n, el número
mn(m+n)(m−n) es divisible por 3.

P55. Hay cuatro pilas de piedras, una con 6 piedras, dos con 8, y una con 9. Cinco jugadores numerados 1, 2, 3, 4 y 5 toman turnos, en el orden de sus números, eligiendo una de las pilas y dividiéndola en dos pilas más pequeñas. El perdedor es el jugador que no pueda hacer esto. Di cuál es el número del jugador que pierde.

P56. Un entero positivo n tiene exactamente 2 divisores, mientras que el número n + 1 tiene exactamente 3 divisores. ¿Cuántos divisores tiene el número n + 2?

P57. Demostrar que el número $k^4 + k^2 + 1$ es compuesto para toda k entero mayor a 1.

P58. Demuestre que si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo.

P59. Demuestre que si $2^n + 1$ es primo, entonces n es potencia de dos.