Examen Individual

NIVEL III

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. Las figuras mostradas, podrían no estar a escala. No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos. La duración del examen es de **2 horas.**

PARTE A

Problema 1. Las caras de un dado tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lalo forma números siguiendo tres pasos: *Paso 1.* Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras; *Paso 2.* Encuentra el producto de los números de las otras tres caras; *Paso 3.* El número lo forma sumando los dos resultados anteriores. ¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

R:

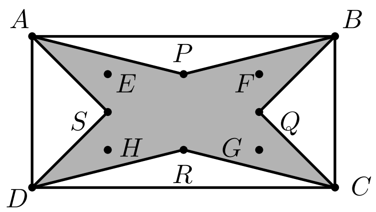
Problema 2. Sea $ABCDE$ un pentágono regular cuyos vértices están en una misma circunferencia, sean M y N los puntos medios de los arcos AB y BC. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle BMN$?

R:

Problema 3. En una bolsa tengo 2 monedas de \$1, 3 monedas de \$5, y 5 monedas de \$10. Si saco 5 monedas de la bolsa sin reemplazo (es decir, una vez que tomo una moneda la dejo afuera) y todas las monedas tienen la misma probabilidad de ser escogidas, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos \$40?

R:

Problema 4. En un rectángulo $ABCD$ de área $40\,cm^2$, considera a E y G, puntos en la diagonal AC de manera que $AE = 2\,cm$, $EG = 6\,cm$ y $GC = 2\,cm$; considera también los puntos F y H en la diagonal BD, de manera que $BF = 2\,cm$, $FH = 6\,cm$ y $HD = 2\,cm$. Se construye una estrella de 4 puntas $APBQCRDSA$, de manera que P, Q, R, S son los puntos medios de los segmentos EF, FG, GH y HE, respectivamente. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la estrella?



R:

Problema 5. En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el 60% de los chicos están bailando y el 80% de las chicas están bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

R:

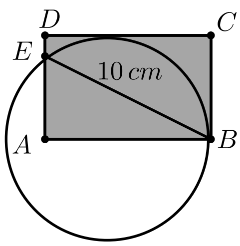
Problema 6. Rogelio pinta los vértices de un cubo de 8 colores distintos. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las letras de la palabra OAXTEPEC en los vértices del cubo de tal manera que no haya 2 letras E unidas por una arista?

R:

Problema 7. Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras, ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero.

R:

Problema 8. Encuentra, en cm^2, el área del rectángulo sombreado $ABCD$ de la siguiente figura, si se conoce que la longitud del segmento BE es de 10 cm, y la circunferencia es tangente a los lados BC y CD del rectángulo.



R:

Problema 9. ¿Cuál es la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de números que sean cuadrados perfectos?

R:

Problema 10. Para cada subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acomoda los números en orden decreciente (de mayor a menor) y realiza la suma con signos alternados; por ejemplo, si tomas al conjunto $\{5, 1, 2\}$ su suma alternada es $5 - 2 + 1 = 4$. ¿Cuánto vale la suma de todas las sumas alternadas cuando consideras todos los subconjuntos?

R:

Problema 11. Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

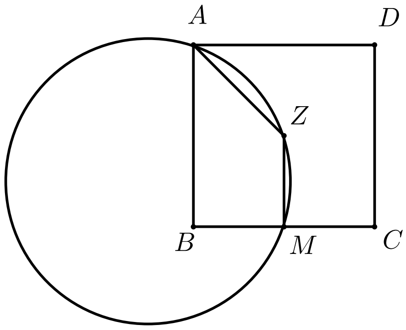
R:

Problema 12. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado 2 y a, b, c, d números reales tales que $f(a) = 500$, $f(b) = 100$, $f(c) = 1000$, $f(d) = 2015$, $g(a) = 1519$, $g(b) = 1919$ y $g(c) = 1019$. ¿Cuánto vale $g(d)$?

R:

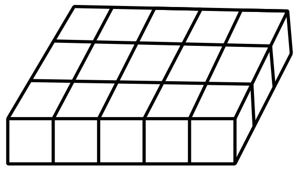
PARTE B

Problema 13. Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide $2\,cm$, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



Problema 14. Un número natural es una quinta potencia si es de la forma k^5 para algún número natural k. Demuestra que si dos números naturales n, m son tales que $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia entonces el número $n^3 \cdot m^2$ también es una quinta potencia.

Problema 15. Hay 15 cajas, acomodadas en un arreglo rectangular de 3×5, como se muestra en el siguiente dibujo, además en cada caja hay 7 canicas.



Una *tirada* consiste en elegir dos cajas que compartan un lado y sacar 2 canicas, una de cada una de las dos cajas elegidas. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede quedar, cuando ya no sea posible realizar una tirada?