Curso de Resolución de Problemas

Segunda Etapa
22 de febrero de 2016
Por: Adrián Favela

¿Qué buscamos en una solución?

Definitivamente la Olimpiada no es un concurso de conocimientos, sino de habilidades, ingenio y creatividad. Es por eso mismo, que nuestro objetivo es identificar alumnos que sean capaces de razonar una solución y de mezclar el uso de diferentes herramientas para poder resolver un problema. Para esto, buscamos ciertas cosas en sus soluciones a los problemas de los examenes:

Detalles/Redacción

Al estar leyendo las soluciones de sus alumnos, esperamos poder entender lo que están pensando. No sólo queremos ver las operaciones que realizaron o la pura respuesta, sino que pedimos siempre que se expliquen lo mejor posible y que den detalles de cada parte de su solución.

Nos ha ocurrido que vemos las operaciones "regadas" por toda la hoja, y la solución es correcta, pero tenemos que estar hilando e inventando lo que creemos que sucedió en la cabeza del alumno para llegar a esas operaciones y al resultado correcto. Muchas veces no se llevan el puntaje completo porque simplemente no sabemos de dónde salió lo que hizo. Recuerden que 1 punto corresponde a la solución en concreto: la conclusión de la demostración, la respuesta numérica, etc.; y el resto corresponde al procedimiento. Por esto es que es muy importante que escriban todo lo que respalde a sus procedimientos, y a esto va el punto siguiente.

Justificaciones

Todo lo que hagan los alumnos, debe ser justificado. *¿Por qué me conviene pintar el tablero de 8x8 como si fuera de ajedrez?*, *¿Por qué éstas son todas las soluciones al problema?*, *¿Por qué este segmento mide la mitad de este otro?*.

Claro que siempre habrá lemas conocidos que puedan obviar, teoremas que no necesitan demostrar que funcionan sino simplemente utilizarlos, etc. Pero si se inventan un proceso, es necesario que justifiquen su funcionalidad.

Orden

Este punto es muy claro. Si bien pueden tener sus operaciones amontonadas en una hoja, es bueno tener otra(s) hoja(s) de redacción donde se escriba todo ordenadamente, con el fin de comprenderlo.

TODAS sus ideas

Este quizá es de los puntos más importantes en una solución. Los puntos de procedimiento se dividen en partes, que denominamos criterios. Los criterios del problema son partes importantes por las que el alumno debe de pasar para poder resolverlo. A cada paso importante se le da un peso específico de acuerdo a su relevancia o su dificultad. Por lo general un problema tiene más de una solución válida, o más de un camino, por lo que se tienen a veces diferentes criterios o se trata de homologarlos lo más que se pueda. Para ponderar la solución, se toma el criterio donde el alumno haya acumulado la mayor cantidad de puntos y ese es el puntaje otorgado.

Podrán ver que conseguir puntos en un problema no es muy dificil, pero para esto hay que tener muchas ideas y lo más importante: Hay que escribirlas. Y aún más importante: No hay que borrarlas o tacharlas. Pasa seguido que alumnos confiesan haber escrito un punto del criterio y lo borraron porque no pensaron que les fuera a servir. Por eso es que los incentivamos a no borrar, porque mientras lo hayan pensado y lo hayan escrito, es decir, nos conste que lo pensaron, va a tener puntaje. No hay ideas tontas o cosas que sea bueno obviar.

Estrategias de problemas por área

Teoría de números

- Descomponer números en primos (Teorema Fundamental de la Aritmética)
- Expresar números con notación desarrollada
- Forzar operaciones
- Considerar criterios de divisibilidad.
- Expresar números pares como $2k$, impares como $2k \pm 1$, primos como $6k \pm 1$.
- Buscar un ciclo (generalmente con residuos).

Geometría

- Mover ángulos y obtener ángulos faltantes por medio de completar triángulos, uso de paralelas, ángulos en un círculo, ángulos externos, etc...
- Trazar paralelas, perpendiculares, líneas notables (bisectrices, mediatrices, etc).
- Partir el problema en triángulos más pequeños.
- Considerar todas las diferentes fórmulas de áreas en un triángulo:

$$|\triangle ABC| = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = s \cdot r$$

- Utilizar teoremas conocidos
  - Pitágoras
  - Tales
  - Teorema de la bisectriz

Combinatoria

- Usar los principios multiplicativo y aditivo del conteo.
- Separar por casos.
- Contar lo que quiero, o contar lo que no quiero y restarlo al total de casos.
- Usar una coloración específica para resolver problemas de tableros o puntos en el espacio.
- Considerar el peor de los casos.

Álgebra

- Representar el problema con ecuaciones.
- Factorizar.
- Considerar leyes de exponentes.
- Utilizar fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado difíciles de factorizar.
- Resolver sistemas de ecuaciones.
- Sustituir variables conocidas en ecuaciones.

Demostraciones

La demostraciones son fundamentales para la mayoría de los problemas de la Olimpiada. Hay muchas maneras de demostrar una proposición, entre las cuales destacan las siguientes:

Deducción

La deducción directa se puede generalizar como sigue:

$$\text{Si } p \to r \text{ y } r \to q\text{, entonces } p \to q.$$

Es entonces ir partiendo de una premisa, suposición o condición inicial, e ir viendo las implicaciones directas de ella. Así una cosa implica otra, hasta que logran hilar una serie de cosas que son ciertas y que llevan a concluir la demostración.

Ejemplo: Demuestra que la suma de dos números pares, es un número par.
Aquí decimos que nuestros dos números iniciales, al ser pares, los podemos representar como $2x$ y $2y$. Al sumarlos tenemos $2x + 2y$ que podemos factorizar como $2(x + y)$ y descubrimos que también tiene factor 2, por lo que la suma debe ser par.

Inducción

La inducción matemática necesita de 3 pasos y se definen como sigue:

1. **Base Inductiva**: Verificación del caso inicial
2. **Hipótesis de Inducción**: La hipótesis (el caso n) se supone como cierta.
3. **Paso Inductivo** Se utiliza la hipótesis, o la base para tratar de pasar al caso siguiente al de la hipótesis. (el caso $n + 1$)

Esto simula un efecto dominó: Se tumba el primer caso manualmente. Luego suponemos que algún caso general más adelante se tumbó, y vemos si con eso podemos tumbar el caso siguiente. Entonces si para cualquier caso, se tumba el siguiente, sucede que si tumbamos el primero, implica que se cae el segundo, y luego el tercero... por lo tanto se tumban todos, y la proposición es cierta.

Ejemplo: Demuestra que: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Nuestra base inductiva es el caso $n = 1$: $1 = \frac{1(2)}{2}$ y es cierta. Luego nuestra hipótesis de inducción la suponemos como cierta: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Y tratamos de hacer el caso siguiente: $1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Para esto, damos por cierta la hipótesis de inducción y la utilizamos sustituyendo: $\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. De aquí es hacer un poco de álgebra para llegar a que si el caso n es cierto, entonces el $n + 1$ también, y así damos por concluida la inducción.

Negación

Esto también se conoce como contradicción o reducción al absurdo. Para que funcione, se niega lo que se quiere demostrar, y se observa que se llega a una contradicción lógica.

Ejemplo: Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.
Vamos a suponer que es racional y tratar de llegar a una contradicción. Si es racional, lo podemos expresar como una fracción donde el numerador y el denominador son números enteros diferentes de cero y sin factores comunes, así: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Pasamos la b y elevamos al cuadrado: $2b^2 = a^2$. De aquí que entonces a^2 debe ser par, por lo tanto a es par. Pero si a es par, entonces $a^2 = 4c$, por lo que b^2 también debe tener un factor 2, por lo que es par, y terminamos con que a y b tienen un factor 2 en común. Lo cual contradice lo primero que dijimos, por lo que $\sqrt{2}$ debe ser irracional.

Contrapositiva

Este último método de demostración se generaliza como sigue:

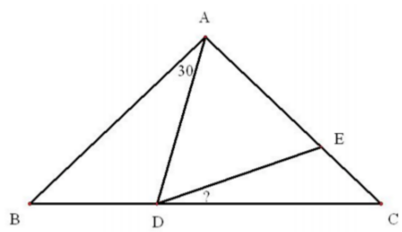
$$\text{Si } p \rightarrow q \text{ entonces } \neg q \rightarrow \neg p$$

Donde $\neg p$ es la negación de la proposición p. Veamos un ejemplo para tenerlo más claro:

Ejemplo: Demostrar que si a^2 es impar, entonces a es impar.
Si a es par, entonces: $a = 2k$ y $a^2 = 4k^2$. Entonces tenemos la implicación: a es par $\rightarrow$ a^2 es par. Con lo siguiente, establecemos la relación contrapositiva: a^2 no es par $\rightarrow$ a no es par. Esto es equivalente a decir que a^2 impar $\rightarrow$ a impar.

Lista de Problemas

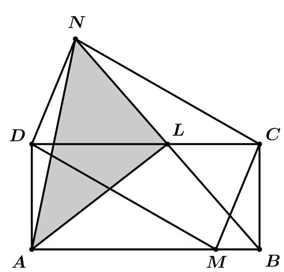
1. Demuestra el criterio de divisibilidad del 3.
2. Encuentra el último dígito de 3^{1234}
3. Encuentra un número n que termine en 6 y que al quitar ese 6 y ponerlo al principio, se convierte en $4n$.
4. Demuestra que el producto de 4 números consecutivos es divisible entre 24.
5. Prueba que la suma de 4 enteros consecutivos no puede ser un cuadrado perfecto.
6. Encuentra el menor a tal que $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$ sea un número de cifras iguales.
7. En la figura, $AB = AC$, $\angle BAD = 30°$ y $AD = AE$. Encuentre el valor del ángulo $\angle EDC$.



8. En un triángulo ABC cualquiera con lados a, b, c muestra que:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

9. Encuentra una fórmula para la suma de ángulos en un polígono y demuéstrala.
10. Sobre el lado AB de un rectángulo $ABCD$ se elige un punto arbitrario M y se traza el paralelogramo $DMCN$ cuya área es 120 cm^2. Sea el punto L la intersección de DC con BN. ¿Cuál es el área del triángulo ANL?



11. ¿De cuántas maneras puetes tomar 3 números distintos entre el 1 y el 100 inclusive, tal que su suma sea par?

12. En la tierra de Panem hay 12 distritos. Cada año se realiza un sorteo para que participen un hombre y una mujer de cada distrito en los famosos juegos del hambre. Lamentablemente tú has sido sorteado como tributo para participar por el distrito 12. Dado que la edición 2015 es especial, tienes que hacer equipo con otros dos tributos, tal que los tres miembros sean de distritos diferentes. Las reglas dicen que no puede haber equipos de puros hombres o de puras mujeres. ¿De cuántas maneras diferentes puedes formar tu equipo?

13. ¿Cuántos números de 6 dígitos existen tal que tienen al menos 1 cifra par?

14. A un tablero de ajedrez se le quitaron dos cuadros de 1×1 de esquinas contrarias. ¿Es posible cubrir ese tablero con fichas de dominó sin que se encimen o se salgan del tablero?

15. 15 niños juntaron 100 manzanas de un jardín. Muestra que hay dos niños que juntaron la misma cantidad de manzanas.

16. En cada una de las caras de un cubo, se escribe un número entero y en cada vértice se escribe el producto de los números de las tres caras adyacentes a ese vértice. Si la suma de los números en los vértices es 105, ¿cuánto vale la suma de los números en todas las caras?

17. Supongamos que los números reales x, y satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = 1 \\ 4^x - 4^y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Encuentra el valor de 2^x.

18. En el problema anterior, encuentra el valor de $x - y$

19. Se tienen dos urnas cada una de las cuales contiene un número arbitrario de bolas (ninguna de las urnas está vacía). Se nos permite hacer dos tipos de operaciones:

    a) Remover un número igual de bolas simultáneamente de ambas urnas; y

    b) duplicar el número de bolas en alguna de las urnas.

    Demuestra que después de llevar a cabo estas operaciones un número finito de veces, ambas urnas pueden ser vaciadas.