

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA FINAL

Sábado 10 de junio

Elaborado por: Gustavo Meza García

Álgebra

Manipulación algebraica

- 1) [Math League HS 2001-2002] Si $a + b + c + d = 2001$ y $b + d = 2002$, ¿Cuál es el valor de $a - b + c - d$?
- 2) Supongamos m y n números reales tales que $m + n = 15$ y $mn = 20$. ¿Cuánto es $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$?
- 3) [AMC 10A 2012] La suma de 3 números enteros tomados por parejas son 12, 17 y 19. ¿Cuál es el número de en medio?
- 4) Encuentra todos los pares (x, y) tales que $xy = 14 + 3x + 2y$
- 5) [AMC 12 2007] ¿Cuántos triángulos rectángulos diferentes con catetos de longitudes enteras tienen áreas que son numéricamente iguales a 3 veces su perímetro? (2 triángulos rectángulos congruentes se consideran iguales)
- 6) Supongamos x un número real tal que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2013}$. ¿Cuánto es $x^2 + \frac{1}{x^2}$?
- 7) [iTest 2008] Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x + 3y + 3z &= 8, \\3x + 2y + 3z &= 808, \\3x + 3y + 2z &= 80808.\end{aligned}$$

Encuentra el valor de $x + y + z$.

- 8) Si a, b son números reales tales que $a + b = 7$ y $ab = 5$, ¿Cuánto es $a^3 + b^3$?
- 9) En un prisma rectangular, el área de la cara de arriba es 135, el área de la cara frontal es 30 y el área de la cara de la derecha es 50. Encuentra el volumen del sólido.
- 10) Sea x y y números reales tales que

$$\begin{cases}x - y = 2\sqrt{3}, \\x + y = 3\sqrt{2}.\end{cases}$$

Encuentra $(x^2 - y^2)^2$.

- 11) Factoriza $n^4 - 22n^2 + 9$
- 12) [MAΘ 1990] Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, encuentra $a^4 + b^4$.
- 13) [AIME 1986] Determina $3x_4 + 2x_5$ si x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 24 \\x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 48 \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 96\end{aligned}$$

- 14) Supongamos p y q números reales tales que $p + q = 6$ y $p^{-1} + q^{-1} = \frac{3}{2}$. ¿Cuánto vale $p^2 + q^2$?
- 15) [AHSME 1987] Si (x, y) es una solución del sistema $xy = 6$ y $x^2y + xy^2 + x + y = 63$ encuentra $x^2 + y^2$.

TALLER DE ENTRENAMIENTO PARA FINAL

Sábado 10 de junio

Elaborado por: Gustavo Meza García

16) [AoPS] Encuentra todos los posibles valores de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ dado que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$.

17) [M&IQ 1992] Resuelve el sistema de ecuaciones

$$(x+y)(x+y+z) = 66,$$

$$(y+z)(x+y+z) = 99,$$

$$(z+x)(x+y+z) = 77.$$

18) [Purple Comet HS 2012] Sean a , b y c números reales diferentes de 0 tales que

$$\frac{ab}{a+b} = 3, \quad \frac{bc}{b+c} = 4, \quad \frac{ca}{c+a} = 5. \text{ Calcula } \frac{abc}{ab+bc+ca}.$$

19) [AIME 2013] Sea ABCD un cuadrado, y sean E y F puntos en AB y BC, respectivamente. La paralela a BC por E y la paralela a AB por F dividen a ABCD en 2 cuadrados y dos rectángulos no cuadrados. La suma de las áreas de los 2 cuadrados es $\frac{9}{10}$ del área del cuadrado ABCD. Encuentra $\frac{AE}{EB} + \frac{EB}{AE}$.

20) Demuestra que si a es la suma de dos cuadrados, también lo es $2a$.

21) Demuestra que $(x+y)^2 - (x-y)^2$ es un múltiplo de 4.

22) Escribe $2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$ como suma de cuadrados

23) [Purple Comet MS 2013] Sea a , b y c números reales positivos tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 989 \text{ y } (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 2013. \text{ Encuentra } a + b + c.$$

24) [MAΘ 1990] Si $a^3 - b^3 = 24$ y $a - b = 2$, entonces encuentra todos los posibles valores de $a + b$.

25) Llamémosle producto de un conjunto al producto de todos los elementos de un conjunto. ¿Cuánto es la suma de los productos de cada uno de los subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6\}$?

26) ¿Cuánto suman los resultados de las tablas de multiplicar hasta el 10?

27) Si x , y y z son números reales tales que $x \neq y$ y $x^2(y+z) = y^2(x+z) = 2$.

Determine el valor de $z^2(x+y)$.

28) Encuentre las soluciones reales x, y, z y w del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= w \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{1}{w} \end{aligned}$$