Intensivo VII

Problemas de Números.

1) (OMM 1) Demuestre que si dos fracciones son irreducibles (simplificadas) y su suma es un entero, entonces ambas fracciones tienen el mismo denominador (Salvo por el signo)
2) (OMM 1) Demuestra que para cualquier entero positivo n, el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es un múltiplo de 3,804.
3) (OMM 2) Demuestra que $19|11a+2b \Leftrightarrow 19|18a+5b$
4) (OMM 2) Si a y b son enteros primos relativos demuestra que el máximo común divisor de $a + b$ y $a^2 + b^2 - nab$ divide a $n+2$
5) (OMM 3) Encuentre dos números positivos tales que

   b^2 es múltiplo de a

   a^3 es múltiplo de b^2

   b^4 es múltiplo de a^3 y

   a^5 es múltiplo de b^4,

   pero b^6 no es múltiplo de a^5
6) (OMM 3) Demuestra que no existe un número entero positivo de 1989 cifras que tenga al menos de tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas sus cifras sea igual al producto de las mismas.
7) (OMM 3) Encuentre el entero positivo más pequeño n tal que si su expansión decimal es $n = a_m a_{m-1} ... a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $r = a_1 a_0 a_{m-1} ... a_2 a_0 0$, entonces r es el doble de n.
8) (OMM 4) Prueba que $n^{n-1}-1$ es divisible entre $(n-1)^2$ para todo entero $n >= 2$