

Intensivo VI

Ecuaciones modulares

- ¿Cuáles de las siguientes propiedades son válidas y cuáles no? Las que sean válidas demuéstralas, las que no, da un contraejemplo.
 - Si $x \equiv y \pmod{m}$ entonces $a^x \equiv a^y \pmod{m}$
 - Si $a^x \equiv b^x \pmod{m}$ entonces $a \equiv b \pmod{m}$
 - Si $a \equiv b \pmod{mx}$ entonces $a \equiv b \pmod{m}$
 - $a \equiv b \pmod{mx} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$
 - Si $ax \equiv bx \pmod{m}$ entonces $a \equiv b \pmod{m}$
 - $ax \equiv bx \pmod{mx} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$
 - Dados m, x primos relativos entonces $ax \equiv bx \pmod{m} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$

Ejemplo Encuentra todas las x tales que $4x \equiv 5 \pmod{6}$.

Solución No hay tales x , pues si fuera así entonces $4x \equiv 5 \pmod{2}$, $0 \equiv 5 \pmod{2}$!!!

Ejemplo Encuentra todas las x tales que $4x \equiv 6 \pmod{10}$.

Solución Empecemos dividiendo todo entre 2. $2x \equiv 3 \pmod{5}$. Ahora multipliquemos por 3 ambos lados de la congruencia. $6x \equiv 9 \pmod{5}$. $x \equiv 4 \pmod{5}$. Entonces x son los números de la forma $5k+4$.

Ejercicio Encuentra el paso erróneo, Resolvamos $5x \equiv 4 \pmod{6}$, de aquí sigue que $5x \equiv 4 \pmod{2}$, por lo que $x \equiv 0 \pmod{2}$. Las x que cumplen son los números pares.

Ejercicio Resuelve las siguientes ecuaciones. Si no tienen solución argumenta

- 1) $12x \equiv 8 \pmod{18}$
- 2) $8x \equiv 12 \pmod{18}$
- 3) $100x \equiv 23 \pmod{101}$
- 4) $70x \equiv 30 \pmod{85}$

Problemas

- 1) Encuentra todos los x tales que $13 \mid (15x+14)^{18}$
- 2) Demostrar que si $17 \mid 2n+3m \Leftrightarrow 17 \mid 9n+5m$
- 3) (Polonia) ¿Qué dígitos debe sustituirse por a y b en $30a0b03$ de tal manera que el entero resultante sea divisible por 13?
- 4) Demuestra el criterio de divisibilidad del 7, del 9 y del 11.

Ejemplo Resuelve el sistema de ecuaciones $x \equiv 2 \pmod{3}$ y $x \equiv 3 \pmod{5}$.

Solución $x \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow x = 3k+2$ para alguna k .

$x \equiv 3 \pmod{5} \Leftrightarrow 3k+2 \equiv 3 \pmod{5} \Leftrightarrow 3k \equiv 1 \pmod{5} \Leftrightarrow 6k \equiv 2 \pmod{5} \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{5}$
 $\Leftrightarrow k = 5q+2$ para alguna q .

x cumple el sistema de ecuaciones $\Leftrightarrow x = 3(5q + 2) + 2 \Leftrightarrow x = 15q + 8 \Leftrightarrow x \equiv 8 \pmod{15}$

Ejercicios Resuelve los siguientes sistemas de congruencia. Si no tienen solución argumenta.

1)

a) $x \equiv 3 \pmod{4}$

b) $x \equiv 2 \pmod{5}$

2)

a) $3x \equiv 5 \pmod{7}$

b) $4x \equiv 6 \pmod{10}$

3)

a) $6x \equiv 2 \pmod{8}$

b) $15x \equiv 5 \pmod{20}$

4)

a) $38x \equiv 23 \pmod{5}$

b) $15x \equiv 57 \pmod{7}$

c) $70x \equiv 48 \pmod{11}$

5)

a) $3x \equiv 5 \pmod{2}$

b) $4x \equiv 10 \pmod{3}$

c) $x \equiv 5 \pmod{6}$

Problemas

1) Resolver $x^2 \equiv 5 \pmod{220}$