Intensivo II

Aplicaciones de módulos

1) Demuestra que $2^{2x+1} + 1$ es múltiplo de 3 para toda x.
2) Demuestra que $4^{3x+1} + 2^{3x+1} +1$ es múltiplo de 7 para toda x.
3) Demuestre que si p es primo mayor que 3, entonces $p \equiv \pm1 \pmod 6$ (Super útil)
4) Sean n, m, r enteros positivos tales que $n^2 + m^2 = r^2$ (Se dice que estos tres números forman una terna pitagórica) Demuestra que $30 \mid nmr$.
5) Demuestra que si $2^n + n^2$ es primo, entonces $6|n - 3$
6) Demuestre que las siguientes ecuaciones no tienen solución
    a) $x^2 + 3 = 15y$
    b) $x^2 - 5y^2 = 2$
    c) $x^2 - 7y = 3$
7) Demuestra que $7 \mid 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ para toda n

C15: Prueba que ningún entero positivo de la forma $8k+7$ puede expresarse como la suma de tres cuadrados enteros.

C16: Sean p y q primos distintos, ambos mayores a tres. Probar que si $p-q$ es una potencia de 2, entonces p+q es divisible por 3.

C17: Si a es impar y no es múltiplo de 3 ni de 5, entonces $240 \mid a^4 - 1$.

C19: Si p es un número primo, $p > 3$, entonces $p^2 = 24m+1$ para algún entero m.

Nota:

Al elevar cuadrados te recomendamos módulo 4, 5, 8, 16
Al elevar al cubo te recomendamos módulo 7, 9
Al elevar a la potencia 4 te recomendamos módulo 8, 16
Al elevar a la potencia 5 te recomendamos módulo 11.

8) Demuestre que las siguientes ecuaciones no tienen solución
    a) $x^2 + y^5 = 11{,}000'000{,}007$
    b) $x^5 - y^2 = 4$
9) Demuestra que 2002^{2002} no puede escribirse como la suma de tres cubos
10) Encuentra todas las soluciones de $m^4 + m^2 = n^4 + 5$
11) Encuentre todas las soluciones de $3^x + 7^y = 5^z + 1$
12) Encuentre todas las soluciones de $1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + n! = m^2$