

- 1) Demuestra por inducción las siguientes fórmulas
  - a)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
  - b)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$
  - c)  $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$
  - d)  $F_n = {}_{n-1}C_0 + {}_{n-2}C_1 + {}_{n-3}C_2 + \dots$
- 2) Si  $a_0 = 1$  y, para  $n \geq 1$ ,  $a_n = 2a_{n-1} + 1$ , ¿Cuánto vale  $a_{2017}$ ?
- 3) Demuestra que toda cantidad mayor que 11 se puede formar con monedas de 7 y 3 pesos.
- 4) Demuestra que todo número se puede expresar como producto de primos.
- 5) Encuentra el error en la siguiente demostración:  
 Demostraremos por inducción que todos los caballos son iguales.  
 Para  $n=1$  el resultado es obvio 1 caballo es igual a él mismo.  
 Supongamos que se cumple para cualesquiera  $x$  caballos.  
 Consideremos  $x+1$  caballos y los numeramos. Tomemos en cuenta los caballos del 1 al  $x$ , como son  $x$  caballos estos deben ser iguales entre sí. Ahora si tomamos los caballos del 2 al  $x+1$  como son  $x$  caballos estos deben ser iguales entre sí. Pero entonces los  $x+1$  caballos son iguales al caballo 2. Que era lo que queríamos demostrar.
- 6) Si  $a_1 = 1$  y, para  $n \geq 2$ ,  $a_n = n + (-1)^n a_{n-1}$ , ¿Cuánto valen  $a_{1000}$ ,  $a_{2001}$ ,  $a_{3002}$ ,  $a_{4003}$ ?
- 7) Las torres de Hanoi consiste en tres varillas verticales. En una de las varillas se apila  $N$  discos. Los discos se apilan sobre una varilla en tamaño decreciente de abajo a arriba, quedando las otras dos varillas vacantes. El juego consiste en pasar todos los discos de la varilla ocupada a una de las otras varillas vacantes. Para realizar este objetivo, es necesario seguir tres simples reglas:
  1. Sólo se puede mover un disco a la vez.
  2. Un disco de mayor tamaño no se puede estar sobre uno más pequeño que él mismo.
  3. Sólo puedes desplazar el disco que se encuentre arriba en cada varilla.
 Encuentra el mínimo número de pasos para resolver las torres de Hanoi con  $N$  discos
- 8) Se tienen  $N$  carros idénticos sobre una circunferencia, entre todos los carros se junta la gasolina necesaria para que un carro de una vuelta completa. Demuestra que un carro puede dar una vuelta completa si le roba la gasolina a todos los autos por los que pase.