Erick Luna, Teresa Uscanga

Repaso

TFA y Descomposición Exponencial

En la clase anterior se enunció el TFA (Teorema Fundamental de la Aritmética) y se probó la primera parte. Como es muy importante, la volveremos a enunciar. La demostración de la segunda parte se dará en entrenamientos posteriores.

Teorema (TFA): Todo número natural diferente de 1 puede ser representado de manera única (salvo por el orden) como un producto de primos.

Ejemplos

1. Responde

   (a) **¿Es $2^9 \cdot 3$ divisible entre 2?** Sí pues $2^9 \cdot 3 = 2 \cdot (2^8 \cdot 3)$.

   (b) **¿Es $2^9 \cdot 3$ divisible entre 5?** No. Supongamos que existe p entero tal que
   $$2^9 \cdot 3 = 5 \cdot p$$
   esto implica que
   $$2^9 \cdot 3 \cdot 5^0 = 5 \cdot p$$
   notemos que el exponente de 5 en el lado izquierdo es 0, mientras que en el lado derecho es al menos 1. Esto siginifica que las factorizaciones son distintas, contradiciendo el TFA.

   ¿Qué relación se debe cumplir? La prueba de este hecho se dará después.

   (c) **¿Es $2^9 \cdot 3$ divisible entre 8?**

   (d) **¿Es $2^9 \cdot 3$ divisible entre 9?**

   (e) **¿Es $2^9 \cdot 3$ divisible entre 6?**

   Una de las cosas que el TFA dice es que al obtener la factorización de un número de dos maneras, si en la primera aparece p^n y en la segunda p^m luego $m = n$.

2. ¿Es cierto que si un número natural es divisible entre 4 y entre 3, entonces es divisible entre $4 \cdot 3 = 12$?

3. ¿Es cierto que si un número natural es divisible entre 4 y entre 6, entonces es divisible entre $4 \cdot 6 = 24$

4. El número A no es divisible entre 4 y en 6. ¿Es posible que el número $2A$ sea divisible entre 3?

5. El número A es par. ¿Es cierto que el número 3A debe ser divisible entre 6?

Definición Decimos que a *natural* es un cuadrado perfecto si existe b entero tal que $a = b^2$.

Escribir la definición de cubo perfecto

Por ejemplo, 9 es cuadrado perfecto ya que $9 = 3^2$, mientras que 8 es cubo perfecto pues $4 = 2^3$. 3 no es cuadrado perfecto *¿Por qué?*.

Definición Decimos que r es irracional si existen n y m enteros tales que $r = \frac{n}{m}$.

Por ejemplo:

- 2 es racional, ya que $2 = \frac{2}{1}$
- $\frac{3}{4}$ es racional, con $n = 3$ y $m = 4$. Además $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = ...$
- $\sqrt{3}$ no es racional. Su demostración es nuestro siguiente ejemplo.

Ejemplo: $\sqrt{3}$ no es racional, estilo TFA

Prueba. De no ser así, existen a y b enteros tales que $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$. Multiplicando ambos lados por b y elevando al cuadrado obtenemos $3b^2 = a^2$. Sea 3^e la potencia de 3 que aparece en la factorización de b y 3^f la potencia de 3 que aparece en a, entonces la potencia de 3 que aparece en a^2 será $2e$ y la de 3 que parece en $2f + 1$. En virtud del TFA obtenemos la ecuación

$$2e + 1 = 2f$$

Lo cual no puede ocurrir, pues un lado de la igualdad es par y el otro impar. Esta contradicción implica que $\sqrt{3}$ es irracional.

Ejercicios Mixtos

1. Tres amigos llamados Do, Re y Mí jugaban a lanzar dados. Los puntos ganados eran 4, 2 y 0, según obtuvieran del mayor al menor resultado. Después de varias jugadas Do, Re y Mí dijeron tener 18, 7 y 6 puntos respectivamente. ¿Quién de ellos miente?

2. Encuentra un número impar que se escriba como $12a + 14b$, con a y b enteros.

3. Si $2^a = 5^b$, ¿cuánto vale $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

4. Considere la siguiente tabla.

1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8
7	8	9	10	11	12
9	10	11	12	13	14
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

(a) De la siguiente lista, ¿cuál es el único número que estará en la última columna de la tabla?

   i. 97

   ii. 98

   iii. 99

   iv. 100

(b) ¿En qué renglón se encontrará?

(c) ¿Cuál es el número que se obtiene de sumar cada casilla?

5. Encontrar todas las parejas de enteros (a, b) tales que $ab - 3a - 2b = 6$.

6. Exactamente una de las siguientes afirmaciones acerca del número de mi casa es falso:

   (a) La suma de las cifras del número es 6.

   (b) Dos cifras del número son iguales.

   (c) El número es menor que 110.

   (d) El número es mayor que 40.

   (e) El número es primo.

7. El producto de tres números, todos más grandes que 1 y distintos entre sí es 100. ¿Cuál es la suma de esos tres números?

8. Calcule la suma
$$\frac{6}{1 \cdot 3} + \frac{6}{2 \cdot 4} + ... + \frac{6}{49 \cdot 51}$$

9. Pruebe que si un número tiene un número impar de divisores, entonces este es cuadrado perfecto.

10. ¿Puede un número escrito con cien 0's, cien 1's y cien 2's ser un cuadrado perfecto?

MCM

Definimos el minimo común multiplo de 2 números $a = p_1^{n_1}...p_k^{n_k}$, $b = q_1^{m_1}...q_l^{m_l}$ como el número $mcm(a, b)$, que cumple

- $mcm(a, b)$ es divisible por el número primo p si, y solo si, p divide a a o a b.

- q^l es un factor de $mcm(a, b)$ si, y solo si, q^l divide tanto a a como a b y q^{l+1} no divide a a o a b.

La cual nos proporciona una receta para calcular el minimo comun multiplo de 2 números

Ejercicios MCM

1. Encuentra el menor número positivo que cumpla
   - Su residuo al dividirse entre 9 sea 8
   - Su residuo al dividirse entre 8 sea 7
   - Su residuo al dividirse entre 7 sea 6

   ...
   - Su residuo al dividirse entre 2 sea 1
2. Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $28x - 63y = 101$
3. Erick construye un collar para su mamá. Tiene cuentas rojas, amarillas, verdes, azules y moradas. Cada dos cuentas pone una roja, cada tres una amarilla, cada seis una verde y cada siete una azul. Cuando Erick llega a la sexta cuenta, tiene que decidir entre usar una cuenta roja, una amarilla o una verde. Como tiene que decidir entre tres colores, pone una morada. Lo mismo si tiene que decidir entre dos y cuatro colores. Erick pondrá la última cuenta la primera vez que tenga que decidir entre cuatro colores. Responde
   (a) ¿Cuántas cuentas tiene el collar?
   (b) ¿En cuáles tiene que decidir por dos colores?
   (c) ¿En cuáles tiene que decidir por tres?
   No es necesario que los escribir todos los números, basta poner su forma

Referencias

1. **Compilación de Problemas de Olimpiada**, Olimpiada de Matemáticas Guanajuato, 2003

2. **Teoría de números** Ma. Luisa Pérez Seguí 1^a Ed. (2003)

3. **Diminuto Curso de Teoría de Números y Anexas**, Eugenio Daniel Flores Alatorre.

4. **A Concrete Introduction to Higher Algebra**, Lindsay N. Childs, 3^a Ed.