Olimpiada Mexicana de
MATEMÁTICAS
Aguascalientes

Teoría de Números. Taller 2

T. Uscanga

7 de Abril 2018

Suma de Gauss

Cuenta la leyenda que el niño Gauss tuvo que calcular la suma

$$1 + 2 + 3 + 4 + .. + 99 + 100$$

Aunque podría parecer aparatosa un truco muy sencillo la resuelve. Acomodemos los términos de manera inteligente y sumemos:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\text{S} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
\text{S} & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
\text{2S} & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Como el número 101 se está sumando 100 veces, luego $2S = 101 \cdot 100$, que implica $S = \frac{101 \cdot 100}{2}$. Nada especial tiene el número 100, de hecho:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & ... & + & (n-1) & + & n \\
S & = & n & + & (n-1) & + & ... & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & ... & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Finalmente, notemos que el número $n+1$ se está sumando n veces, por lo que $2S = (n+1) \cdot (n)$, que implica $S = \frac{(n+1)\cdot(n)}{2}$.

Ejercicios

1. Calcule la suma $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 2017 + 2018$.
2. Calcule la suma $2 + 4 + 6 + ... + 2018$. *¿Qué tienen en común todos los términos?*
3. Calcule la suma $1 + 3 + 5 + 7... + 2015 + 2017$.
4. Caclule la suma $1000 + 1001 + ... + 2017 + 2018$.

Más sumas

El siguiente ejemplo fue tomado nuestra primera referencia bibliográfica.

[1.6] Ejemplo. Calcular la suma de los 100 quebrados que se obtienen formando todos los cocientes de cada par de números de la siguiente lista

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$$

Solución. Pongamos los quebrados en una tabla:

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{2}{128}$	$\frac{2}{256}$	$\frac{2}{512}$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{64}$	$\frac{4}{128}$	$\frac{4}{256}$	$\frac{4}{512}$
$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{8}{512}$
$\frac{16}{1}$	$\frac{16}{2}$	$\frac{16}{4}$	$\frac{16}{8}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{16}{32}$	$\frac{16}{64}$	$\frac{16}{128}$	$\frac{16}{256}$	$\frac{16}{512}$
$\frac{32}{1}$	$\frac{32}{2}$	$\frac{32}{4}$	$\frac{32}{8}$	$\frac{32}{16}$	$\frac{32}{32}$	$\frac{32}{64}$	$\frac{32}{128}$	$\frac{32}{256}$	$\frac{32}{512}$
$\frac{64}{1}$	$\frac{64}{2}$	$\frac{64}{4}$	$\frac{64}{8}$	$\frac{64}{16}$	$\frac{64}{32}$	$\frac{64}{64}$	$\frac{64}{128}$	$\frac{64}{256}$	$\frac{64}{512}$
$\frac{128}{1}$	$\frac{128}{2}$	$\frac{128}{4}$	$\frac{128}{8}$	$\frac{128}{16}$	$\frac{128}{32}$	$\frac{128}{64}$	$\frac{128}{128}$	$\frac{128}{256}$	$\frac{128}{512}$
$\frac{256}{1}$	$\frac{256}{2}$	$\frac{256}{4}$	$\frac{256}{8}$	$\frac{256}{16}$	$\frac{256}{32}$	$\frac{256}{64}$	$\frac{256}{128}$	$\frac{256}{256}$	$\frac{256}{512}$
$\frac{512}{1}$	$\frac{512}{2}$	$\frac{512}{4}$	$\frac{512}{8}$	$\frac{512}{16}$	$\frac{512}{32}$	$\frac{512}{64}$	$\frac{512}{128}$	$\frac{512}{256}$	$\frac{512}{512}$

El trabajo se simplifica mucho si agrupamos correctamente antes de hacer la suma. Por ejemplo, observemos que en una misma columna de la tabla todos tienen el mismo denominador, así que la suma de cada columna es fácil de calcular; además, en cada caso los numeradores son los mismos y su suma es $1+2+4+8+16+32+64+128+256+512 = 1023$. Ahora debemos calcular la suma de las sumas de las columnas:

$$\begin{aligned}
&\frac{1023}{1} + \frac{1023}{2} + \frac{1023}{4} + \frac{1023}{8} + \frac{1023}{16} \\
&+ \frac{1023}{32} + \frac{1023}{64} + \frac{1023}{128} + \frac{1023}{256} + \frac{1023}{512} \\
&= 1023\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}\right) \\
&= 1023\left(\frac{512+256+128+64+32+16+8+4+2+1}{512}\right) \\
&= \frac{1023^2}{512}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Normalmente nos encontraremos con sumas de potencias como en el ejemplo anterior, en el cual observamos que $1+2+...+2^9 = 2^{10}-1$. La formula general para tal caso es:

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Para obtenerla veamos que

$$\begin{aligned}(1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n) \cdot (x - 1) &= x \cdot (1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + x^n) \\ &= x + x^2 + ... + x^n + x^{n+1} - (1 + x + ... + x^{n-1} + x^n) \\ &= x^{n+1} - 1\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Calcular 1-3+9-27+81-243+729.
2. Escribir 11111111 como potencias de 10 y verificar la fórmula.
3. Escribir 1001001001 como potencias de 10 y comprobar la fórmula para este caso.

Más métodos para calcular sumas

La manera de calcular

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 97^2 + 98^2 + 99^2 + 100^2$$

es un poco más interesante. Empezamos con la fórmula

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 - k^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 \\ &= 3k^2 + 3k + 1\end{aligned}$$

Particularizando está fórmula para $k = 1, .., n$ y sumando, obtenemos

$$\begin{array}{cccccccccccc}
2^3 & - & 1^3 & = & 3 & \cdot & 1^2 & + & 3 & \cdot & 1 & + & 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & 3 & \cdot & 2^2 & + & 3 & \cdot & 2 & + & 1 \\
4^3 & - & 3^3 & = & 3 & \cdot & 3^2 & + & 3 & \cdot & 3 & + & 1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \\
(n-1)^3 & - & (n-2)^3 & = & 3 & \cdot & (n-2)^2 & + & 3 & \cdot & (n-2) & + & 1 \\
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3 & \cdot & (n-1)^2 & + & 3 & \cdot & (n-1) & + & 1 \\
(n+1)^3 & - & n^3 & = & 3 & \cdot & n^2 & + & 3 & \cdot & n & + & 1 \\
\hline
(n+1)^3 & - & 1 & = & 3 & \cdot & (1^2 + ... + n^2) & + & 3 & \cdot & (1 + ... + n) & + & n
\end{array}$$

Así al despejar $1^2 + ... + n^2$ obtenemos

$$\begin{aligned}
1^2 + ... + n^2 &= \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\cdot(1+..+n) - n}{3} \\
&= \frac{(n+1)^3 - 1 - 3\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - n}{3} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(n+1)^3 - 2 - 3\cdot n\cdot(n+1) - 2\cdot n}{2} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(n+1)^3 - 3\cdot n\cdot(n+1) - 2\cdot n - 2}{2} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot(n+1)^3 - 3\cdot n\cdot(n+1) - 2\cdot(n+1)}{2} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)\{2\cdot(n+1)^2 - 3\cdot n - 2\}}{2} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{(n+1)\{2\cdot(n^2+2n+1) - 3\cdot n - 2\}}{2} \\
&= \cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Esta fórmula es importante, pero es más importante el procedimiento con el cual se obtuvo.

Ejercicios

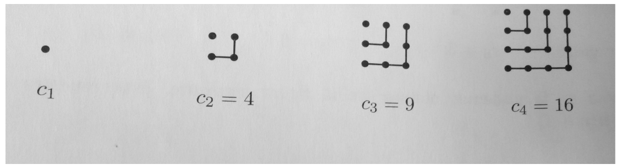
De modo análogo calcular o demostrar:

1. $1^3 + ... + n^3 = (\frac{n\cdot(n+1)}{2})^2$
2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{2016\cdot 2017} + \frac{1}{2017\cdot 2018}$ *¿Se puede escribir cada termino como la diferencia de dos números?.*
3. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + ... + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}$.

Problemas

1. Calcular $100 - 99 + 98 - 97 + ... + 2 - 1$
2. Calcular $2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$.
3. En la sucesión
$$1, 3, 5, -7, -9, -11, ...$$
Los signos se van alternando cada 3 términos. Calcule la suma de los primeros 300.
4. Deducir una fórmula para la suma de los primeros n pares.

5. Deducir una fórmula para la suma de los primeros n impares.



6. Encontrar la suma de todos los números de tres cifras en cuyos dígitos aparece exactamente una vez los dígitos 1, 2, 3 y 4.

7. Raúl leyó un libro. El primer día leyó 30 páginas y cada día siguiente leyó 6 páginas más que el día anterior. Si la lectura le llevó 100 días, ¿cuántas páginas tenía el libro?

8. **Definición:** Una progresión aritmética es una sucesión de números

$$a_1, a_2 ..., a_n, ...$$

tales que la diferencia entre cualesquiera dos consecutivos es constante, es decir

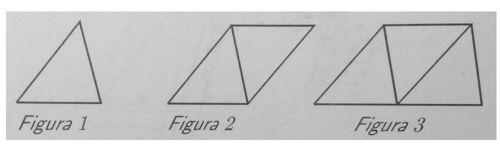
$$a_{i+1} - a_i = d$$

Calcule esto notando cuántos palillos se aumentan en cada

(a) Encuentra el término a_i en terminos de a_1

(b) ¿Es posible encontrar una fórmula para la suma $a_1 + ... + a_n$?

(c) Las siguientes figuras están formadas con palillos y constan de triángulos equiláteros



¿Qué cantidad de palillos se necesitan para construir la figura que tiene 100 triángulos? Calcule esto notando que para construir una siguiente figura se adicionan dos palillos.

(d) Encuentra tres numeros que estén en progresión aritmética cuya suma sea 27 y la suma de sus cuadrados $\frac{511}{2}$

(e) Encuentre la suma de los primeros cien números que acaban en 5.

(f) Los números a, b, c, e están en progresión aritmética (en ese orden). Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{e}} = \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{e}}$$

9. Calcular $1 \cdot 1000 + 2 \cdot 999 + 3 \cdot 998 + ... + 999 \cdot 2 + 1000 \cdot 1$.

10. Sea r un número natural. Demuestra que

$$\underbrace{11...11}_{2r \text{ veces}} - \underbrace{22...22}_{r \text{ veces}}$$

es un cuadrado perfecto.

11. Prueba que el número: $2^{2005} + 4^{2005} + ... + 2006^{2005}$ es múltiplo del número $2 + 4 + 6 + ... + 2006$

Referencias

1. **Teoría de números** Ma. Luisa Pérez Seguí 1^a Ed. (2003)

2. **Álgebra** R. Bulajich, José Antonio Gomez Ortega, Rogelio Valdez Delgado 1^a Ed. (2014)

3. **Cálculo Infinitesimal** Michael Spivak, 2^a Ed. (1996)

4. **Diminuto Curso de Teoría de Números y Anexas** Eugenio Daniel Flores Alatorre.